

# Le simple et le complexe

Guillaume Theyssier et Laurent Boyer

CNRS & Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Savoie

guillaume.theyssier@univ-savoie.fr

## Quand le tout est plus que la somme de ses parties...

### Décomposer pour comprendre ?

On comprend comment fonctionne une voiture parce qu'on comprend chacune de ses parties (moteur, roues, volant, freins, etc). Et chacune de ces parties est à son tour comprise car elle peut être décomposée en "pièces" plus simples (pistons, cardans, disques, etc). Mais peut-on procéder ainsi dans toutes les situations ? La compréhension de toutes les parties suffit-elle toujours à comprendre le tout ?

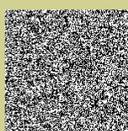
**Non**, certains systèmes résistent à cette analyse. Les parties qui les composent peuvent être simples, mais la façon dont elles interagissent les unes avec les autres rend le tout beaucoup plus difficile à comprendre. On parle alors de **systèmes complexes**.

De nombreux systèmes complexes sont présents dans la nature (tas de sable, cerveau, sociétés animales ou humaines, etc). Mais pour comprendre les systèmes complexes en général, on étudie un modèle mathématique idéalisé : les **automates cellulaires**.

### Les automates cellulaires

Un automate cellulaire est un ensemble de petites **cellules** carrées positionnées les unes à côté des autres et formant une **grille**. Les cellules restent immobiles, mais chacune d'elles contient une **couleur** qui peut changer au cours du temps. Pour cela, chaque cellule obéit à la même **règle** qui détermine comment la couleur de la cellule évolue en fonction de la couleur de ses **cellules voisines**. Toutes les cellules appliquent la règle en même temps : cela constitue une étape. L'automate cellulaire évolue ainsi étape après étape.

**Exemple** • 150 × 150 cellules / couleurs : noir ou blanc  
• la règle : prendre la couleur majoritaire parmi les cellules voisines



Situation de départ...



...après 1 étape...



...après 20 étapes...

## Complètement déterminés mais imprévisibles !

Les automates cellulaires sont des systèmes complètement **déterminés** : si l'on connaît la couleur de chaque cellule au départ, on peut tout à fait déterminer la couleur de chacune d'entre elles à l'étape suivante. Comment ? Comme le fait l'automate cellulaire : en appliquant bêtement la règle pour chaque cellule !

*Mais prédire le futur d'un système, ce n'est pas simplement calculer une étape :*

- si l'on veut connaître la couleur d'une cellule après un grand nombre d'étapes, peut-on faire mieux que d'appliquer laborieusement la règle à chaque cellule, étapes après étapes ? n'existe-t-il pas de "raccourci" de calcul pour avoir directement la réponse ?
- si l'on ne connaît la couleur que d'une partie des cellules au départ, peut-on savoir ce qu'elles vont devenir à long terme ?
- est-ce qu'à partir d'une situation de départ donnée, on peut prédire si une couleur va finir par définitivement disparaître ?

Pour certains automates cellulaires, la réponse à chacune de ces questions est non : aucune de ces prédictions ne peut être faite même si l'on connaît parfaitement la règle de l'automate.

2 explications

### Chaos déterministe

« De petites causes peuvent avoir de grands effets »

Henri Poincaré était un grand mathématicien et il a travaillé dans de nombreux domaines. L'une des notions fondamentales qu'il a mises en lumière est la **sensibilité aux conditions initiales** exprimée par la formule mathématique suivante :

$$\exists \epsilon, \forall x, \forall \delta, \exists y, \exists t : d(x, y) \leq \delta \text{ et } d(F^t(x), F^t(y)) \geq \epsilon.$$

Lorsque l'on mesure l'état d'un système, ce n'est jamais exact, il reste toujours une certaine imprécision. La formule ci-dessus dit qu'il existe un niveau de précision que l'on ne peut pas dépasser, qui est intrinsèque au système : la mesure de l'état initial peut-être aussi précise que l'on veut, les prédictions que l'on peut faire sur le système à long terme seront toujours limitées en précision.



H. Poincaré  
1854-1912

L'exemple de système sensible aux conditions initiales le plus connu est l'atmosphère : tout le monde a constaté que malgré tous les efforts et les moyens développés pour prédire le temps qu'il va faire, les prévisions à plusieurs jours restent toujours imprécises. À ce sujet, le météorologue Edward Lorenz utilisa la célèbre formule :

« un battement d'ailes de papillon au Brésil peut avoir une influence sur la présence d'une tornade au Texas »

### Incalculabilité

« Il y a plus de problèmes que de programmes pour calculer des solutions »

Bien avant la construction du premier ordinateur, les possibilités des machines en terme de calcul ont été étudiées mathématiquement. Et l'on a vite découvert leurs limites : des limites intrinsèques et absolues qui ne dépendent pas de paramètres techniques (vitesse du processeur, taille de la mémoire, etc).

Ainsi, certaines prédictions sont impossibles à faire au moyen d'un programme de calcul. Alan Turing a démontré par exemple qu'il n'existe pas de programme capable de prédire si un programme donné va finir par s'arrêter et donner une réponse ou s'il va tourner en rond indéfiniment et ne jamais fournir de réponse. Ce résultat, connu sous le nom de "problème de l'arrêt", provient d'un **paradoxe logique** qui ressemble fortement au "paradoxe du barbier".



A. Turing  
1912-1954

« Le barbier est la personne qui rase les gens qui ne se rasent pas eux-mêmes. Par qui est rasé le barbier ? »

Un exemple de problème incalculable pour les automates cellulaires est le suivant : étant donné la règle d'un automate cellulaire, quelles couleurs finissent toujours par disparaître de la grille au bout d'un certain temps ?

## Complexes, chaotiques, incalculables... que faire ?

### Tout n'est pas complexe !

Pour la plupart des automates cellulaires, prévoir le comportement à long terme est très difficile, voir impossible. Mais certains automates cellulaires sont beaucoup prévisibles : on arrive à trouver des expressions simples qui donnent la couleur des cellules après un grand nombre d'étapes sans avoir à refaire tous les calculs étape par étape.



### Régularités dans le chaos

Dans certains systèmes et en particulier dans certains automates cellulaires, le comportement est tellement chaotique qu'il devient prévisible statistiquement.

En effet, à force de mélanger au maximum les couleurs, ils finissent par uniformiser : toute couleur à la même chance d'apparaître en chaque cellule et à chaque étape.