Automates cellulaires : un modèle de complexités

Thèse de doctorat

Guillaume Theyssier

Équipe MC2 — LIP (UMR CNRS, INRIA, ÉNS Lyon, UCBL)

14 décembre 2005

Automates cellulaires

systèmes dynamiques discrets (comportement global)

$\uparrow \quad \downarrow$

objets syntaxiques (définition locale)

Objets syntaxiques

Définition

$\mathcal{A} = (\mathcal{R}, V, \Sigma, \delta_{\mathcal{A}})$

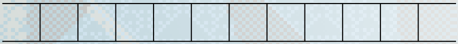
Objets syntaxiques

Définition

$\mathcal{A} = (\mathcal{R}, V, \Sigma, \delta_{\mathcal{A}})$

$\mathcal{R}$ *réseau de cellules*

$\mathcal{R} = \mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$



Objets syntaxiques

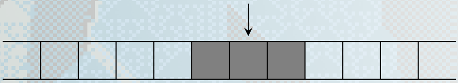
Définition

$\mathcal{A} = (\mathcal{R}, V, \Sigma, \delta_{\mathcal{A}})$

$\mathcal{R}$ *réseau de cellules*

V *voisinage*

$$V \subseteq \mathcal{R},$$
$$V = \{v_1, \ldots, v_k\}$$



Objets syntaxiques

Définition

$\mathcal{A} = (\mathcal{R}, V, \Sigma, \delta_{\mathcal{A}})$

- $\mathcal{R}$ *réseau de cellules*
- V *voisinage*
- Σ *alphabet / ensemble d'états*

Σ fini

Objets syntaxiques

Définition

$\mathcal{A} = (\mathcal{R}, V, \Sigma, \delta_{\mathcal{A}})$

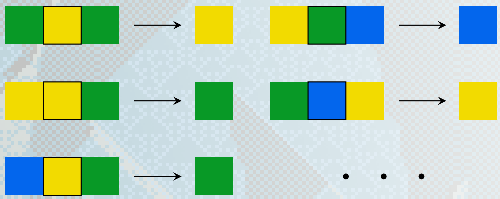
$\mathcal{R}$ *réseau de cellules*

V *voisinage*

Σ *alphabet / ensemble d'états*

$\delta_{\mathcal{A}}$ *règle de transition locale*

$\delta_{\mathcal{A}} : \Sigma^{|V|} \longrightarrow \Sigma$



Évolution globale

Définition

configuration $c \in \Sigma^{\mathcal{R}}$

Attribution d'un état à chaque cellule du réseau

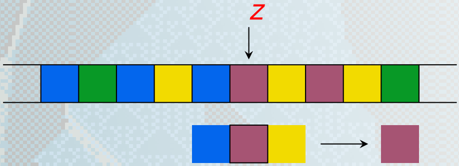
Évolution globale

Définition

configuration $c \in \Sigma^{\mathcal{R}}$

évolution globale $\mathcal{A}(c)_z = \delta_{\mathcal{A}}\left(c_{z+v_1}, \ldots, c_{z+v_k}\right)$ $(\forall z \in \mathcal{R})$

$\mathcal{A} : \Sigma^{\mathcal{R}} \rightarrow \Sigma^{\mathcal{R}}$
application synchrone et uniforme de $\delta_{\mathcal{A}}$.



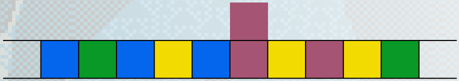
Évolution globale

Définition

configuration $c \in \Sigma^{\mathcal{R}}$

évolution globale $\mathcal{A}(c)_z = \delta_{\mathcal{A}}\left(c_{z+v_1}, \ldots, c_{z+v_k}\right)$ $(\forall z \in \mathcal{R})$

$\mathcal{A} : \Sigma^{\mathcal{R}} \rightarrow \Sigma^{\mathcal{R}}$
application synchrone et uniforme de $\delta_{\mathcal{A}}$.



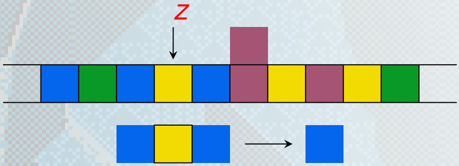
Évolution globale

Définition

configuration $c \in \Sigma^{\mathcal{R}}$

évolution globale $\mathcal{A}(c)_z = \delta_{\mathcal{A}}\left(c_{z+v_1}, \ldots, c_{z+v_k}\right)$ $(\forall z \in \mathcal{R})$

$\mathcal{A} : \Sigma^{\mathcal{R}} \to \Sigma^{\mathcal{R}}$
application synchrone et uniforme de $\delta_{\mathcal{A}}$.



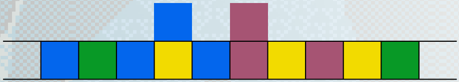
Évolution globale

Définition

configuration $c \in \Sigma^{\mathcal{R}}$

évolution globale $\mathcal{A}(c)_z = \delta_{\mathcal{A}}\left(c_{z+v_1}, \ldots, c_{z+v_k}\right)$ $(\forall z \in \mathcal{R})$

$\mathcal{A} : \Sigma^{\mathcal{R}} \to \Sigma^{\mathcal{R}}$
application synchrone et uniforme de $\delta_{\mathcal{A}}$.



Évolution globale

Définition

configuration $c \in \Sigma^{\mathcal{R}}$

évolution globale $\mathcal{A}(c)_z = \delta_{\mathcal{A}}\left(c_{z+v_1}, \ldots, c_{z+v_k}\right)$ $(\forall z \in \mathcal{R})$

$\mathcal{A} : \Sigma^{\mathcal{R}} \to \Sigma^{\mathcal{R}}$
application synchrone et uniforme de $\delta_{\mathcal{A}}$.

Évolution globale

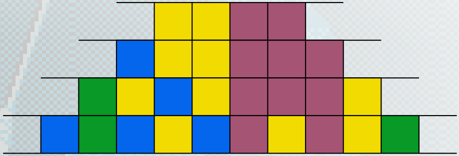
Définition

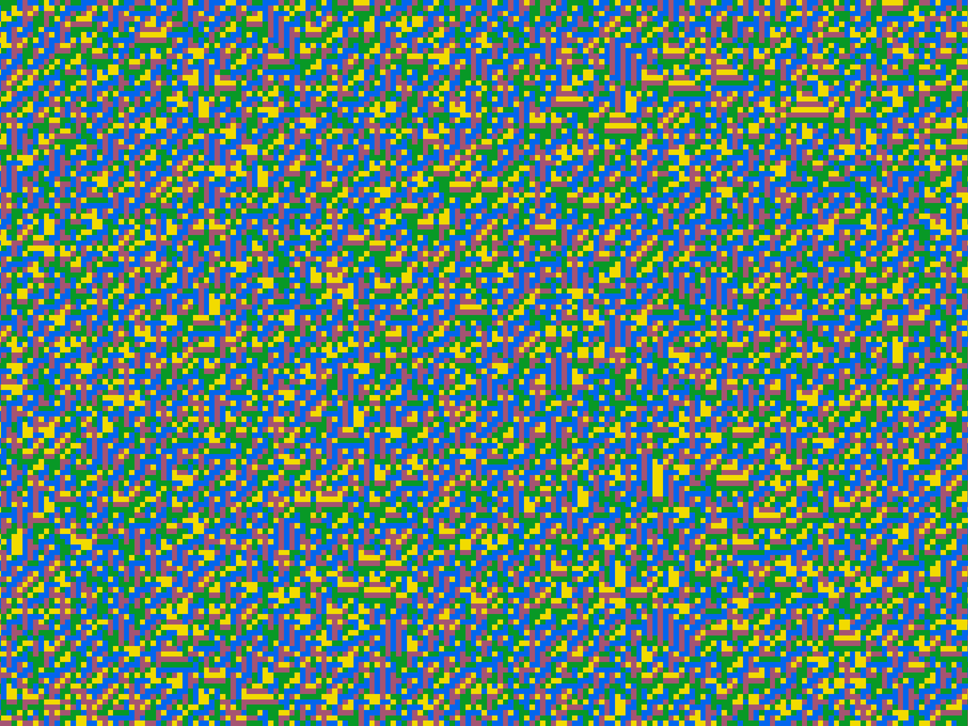
configuration $c \in \Sigma^{\mathcal{R}}$

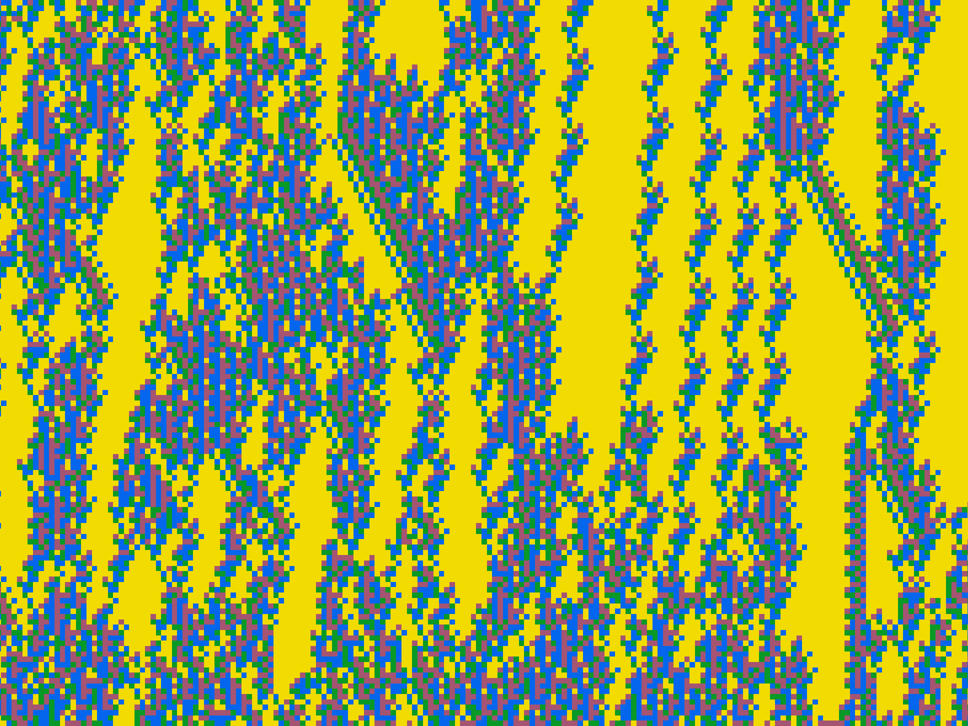
évolution globale $\mathcal{A}(c)_z = \delta_{\mathcal{A}}\left(c_{z+v_1}, \ldots, c_{z+v_k}\right)$ $(\forall z \in \mathcal{R})$

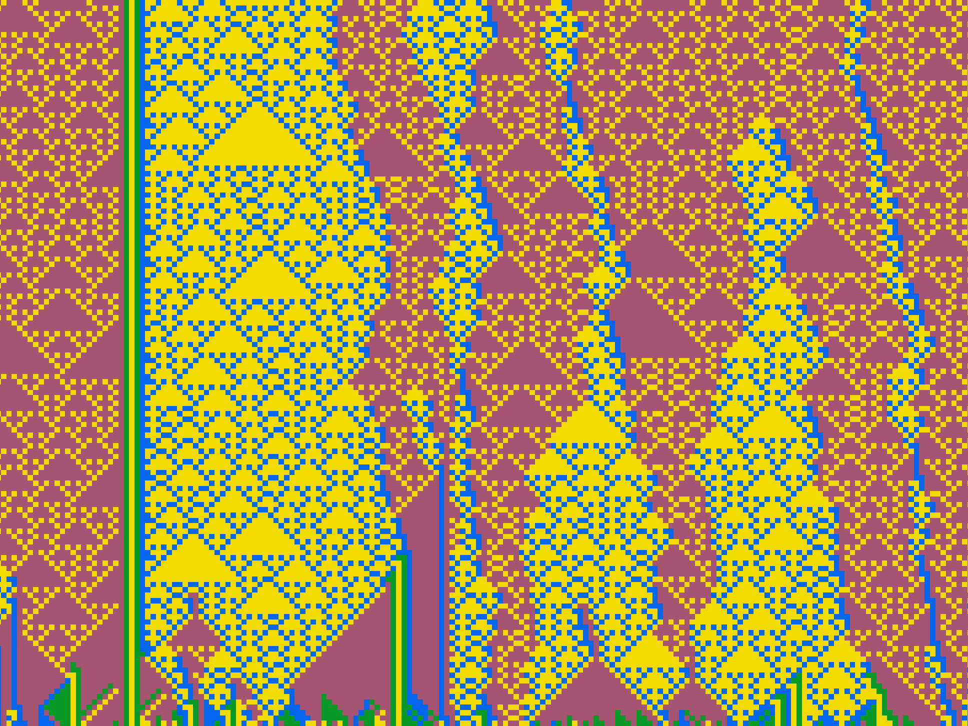
diagramme espace-temps $\mathcal{D} \in \left(\Sigma^{\mathcal{R}}\right)^{\mathbb{N}}$

Suite de configurations :
c, $\mathcal{A}(c)$, $\mathcal{A}^2(c)$, ...









Plan de l'exposé

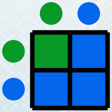
Plan de l'exposé

Relations sur les règles locales

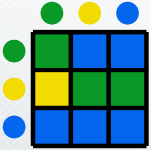
- notion de sous-automate : $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$

Relations sur les règles locales

- notion de sous-automate : $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$

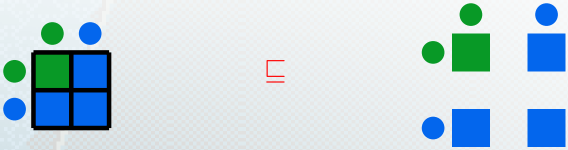


$\sqsubseteq$



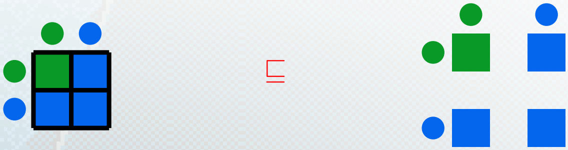
Relations sur les règles locales

- notion de sous-automate : $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ (restriction de l'alphabet)



Relations sur les règles locales

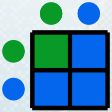
- notion de sous-automate : $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ (restriction de l'alphabet)



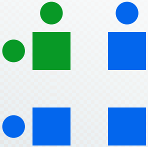
- notion d'automate quotient : $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$

Relations sur les règles locales

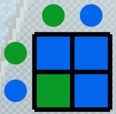
- notion de sous-automate : $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ (restriction de l'alphabet)



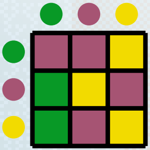
$\sqsubseteq$



- notion d'automate quotient : $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$

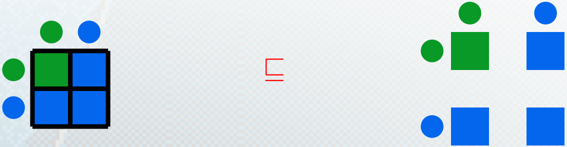


$\trianglelefteq$

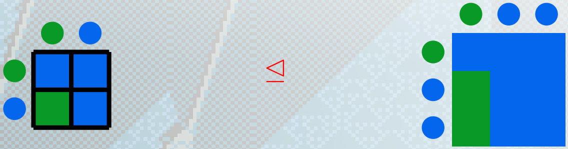


Relations sur les règles locales

- notion de sous-automate : $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ (restriction de l'alphabet)

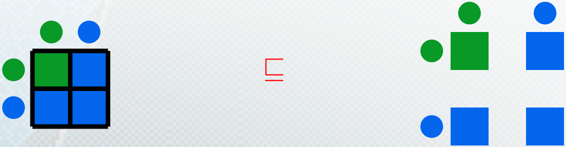


- notion d'automate quotient : $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$ (coloriage de l'alphabet)

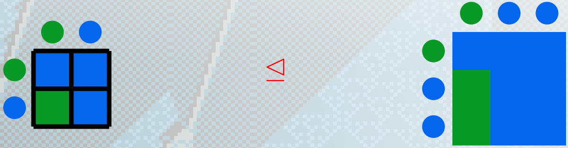


Relations sur les règles locales

- notion de sous-automate : $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ (restriction de l'alphabet)



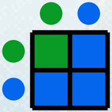
- notion d'automate quotient : $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$ (coloriage de l'alphabet)



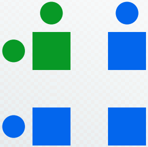
- compositions : $\sqsubseteq \trianglelefteq \trianglelefteq \sqsubseteq \trianglelefteq \sqsubseteq \sqsubseteq \cdots$

Relations sur les règles locales

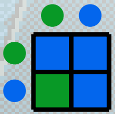
- notion de sous-automate : $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ (restriction de l'alphabet)



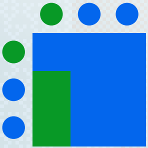
$\sqsubseteq$



- notion d'automate quotient : $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$ (coloriage de l'alphabet)



$\trianglelefteq$



- compositions : $\sqsubseteq\trianglelefteq\trianglelefteq\sqsubseteq\trianglelefteq\sqsubseteq\sqsubseteq \cdots$
- $\trianglelefteq\!\sqsubseteq$ est la relation la plus générale
- 3 relations transitives : $\sqsubseteq$, $\trianglelefteq$ et $\trianglelefteq\!\sqsubseteq$ (mais $\sqsubseteq\!\trianglelefteq$ ne l'est pas)

Caractérisation topologique des règles globales

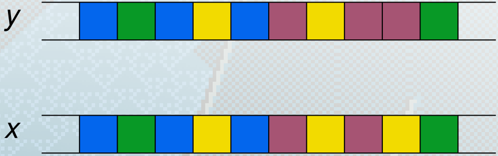
Définition (distance de Cantor)

$$\mathfrak{d}(x, y) = 2^{-\min\{\|z\|_\infty \,:\, x_z \neq y_z\}}$$

Caractérisation topologique des règles globales

Définition (distance de Cantor)

$$\mathfrak{d}(x, y) = 2^{-\min\{\|z\|_\infty \,:\, x_z \neq y_z\}}$$

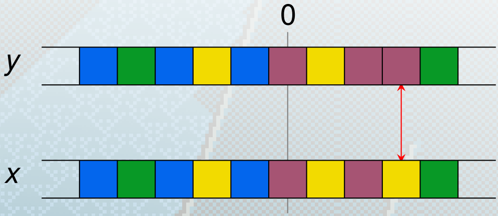


- $\mathfrak{d}(x, y) = ?$

Caractérisation topologique des règles globales

Définition (distance de Cantor)

$$\mathfrak{d}(x,y) = 2^{-\min\{\|z\|_\infty \,:\, x_z \neq y_z\}}$$

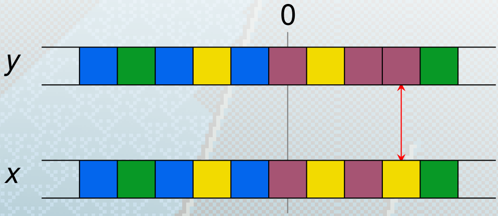


- $\mathfrak{d}(x,y) = 2^{-3}$
- on a fixé une origine à $\mathcal{R}$

Caractérisation topologique des règles globales

Définition (distance de Cantor)

$\mathfrak{d}(x,y) = 2^{-\min\{\|z\|_\infty \,:\, x_z \neq y_z\}}$



- $\mathfrak{d}(x,y) = 2^{-3}$
- on a fixé une origine à $\mathcal{R}$

Théorème (Curtis-Hedlund-Lyndon, 69)

Les lois d'évolution globales des AC *sont exactement les fonctions continues qui commutent avec les décalages.*

- décalage (shift) : $\sigma_z(x)_{z'} = x_{z'-z}$

Systèmes dynamiques discrets

- fonctions continues sur un compact
- théorie classique des systèmes dynamiques

Systèmes dynamiques discrets

- fonctions continues sur un compact
- théorie classique des systèmes dynamiques

Exemple de propriété :

- ensemble limite (attracteur maximal) : $\Omega_{\mathcal{A}} = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^t(\Sigma^{\mathcal{R}})$

Systèmes dynamiques discrets

- fonctions continues sur un compact
- théorie classique des systèmes dynamiques

Exemple de propriété :

- ensemble limite (attracteur maximal) : $\Omega_{\mathcal{A}} = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^t(\Sigma^{\mathcal{R}})$
- nilpotence : $\left|\Omega_{\mathcal{A}}\right| = 1$

Systèmes dynamiques discrets

- fonctions continues sur un compact
- théorie classique des systèmes dynamiques

Exemple de propriété :

- ensemble limite (attracteur maximal) : $\Omega_{\mathcal{A}} = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^t(\Sigma^{\mathcal{R}})$
- nilpotence : $|\Omega_{\mathcal{A}}| = 1$

Particularité des AC :

- commutation avec décalages

Systèmes dynamiques discrets

- fonctions continues sur un compact
- théorie classique des systèmes dynamiques

Exemple de propriété :

- ensemble limite (attracteur maximal) : $\Omega_{\mathcal{A}} = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^t(\Sigma^{\mathcal{R}})$
- nilpotence : $|\Omega_{\mathcal{A}}| = 1$

Particularité des AC :

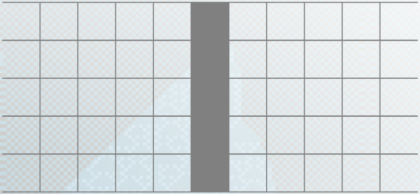
- commutation avec décalages
- espace discret $\Rightarrow$ changements d'échelle

Changements d'échelle [N. Ollinger, 02]

- 3 opérations spatio-temporelles
- action sur la structure indépendamment du contenu

Changements d'échelle [N. Ollinger, 02]

- 3 opérations spatio-temporelles
- action sur la structure indépendamment du contenu



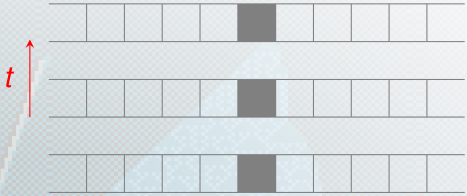
Formellement...

$$\mathcal{A}^{<m,t,z>} = \qquad \mathcal{A}$$

Changements d'échelle [N. Ollinger, 02]

- 3 opérations spatio-temporelles
- action sur la structure indépendamment du contenu

- compression du temps



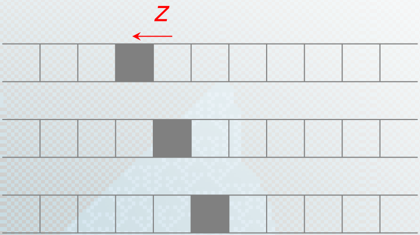
Formellement...

$$\mathcal{A}^{<m,t,z>} = \qquad \mathcal{A}^{t}$$

Changements d'échelle [N. Ollinger, 02]

- 3 opérations spatio-temporelles
- action sur la structure indépendamment du contenu

- compression du temps
- décalage régulier du réseau



Formellement...

$$\mathcal{A}^{<m,t,z>} = \sigma_z \circ \mathcal{A}^t$$

Changements d'échelle [N. Ollinger, 02]

- 3 opérations spatio-temporelles
- action sur la structure indépendamment du contenu

- compression du temps
- décalage régulier du réseau
- groupage de cellules en blocs

Formellement...

$$\mathcal{A}^{<m,t,z>} = \mathbf{o}_m^{-1} \circ \sigma_z \circ \mathcal{A}^t \circ \mathbf{o}_m$$

Changements d'échelle [N. Ollinger, 02]

- 3 opérations spatio-temporelles
- action sur la structure indépendamment du contenu

- compression du temps
- décalage régulier du réseau
- groupage de cellules en blocs

Fait

$\mathcal{A}^{<m,t,z>} = \mathbf{o}_m^{-1} \circ \sigma_z \circ \mathcal{A}^t \circ \mathbf{o}_m$ est un automate cellulaire.

Groupage [N. Ollinger, 02]

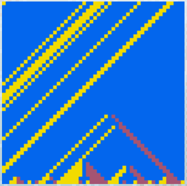
- relation de pré-ordre :

$$\mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \exists m, t, z, m', t', z' \;:\; \mathcal{A}^{<m,t,z>} \sqsubseteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}.$$

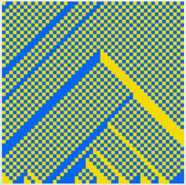
Groupage [N. Ollinger, 02]

- relation de pré-ordre :

$$\mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \exists m, t, z, m', t', z' \;:\; \mathcal{A}^{<m,t,z>} \sqsubseteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}.$$



$\mathcal{A}$

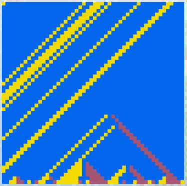


$\mathcal{B}$

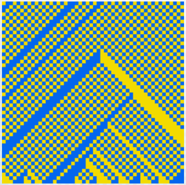
Groupage [N. Ollinger, 02]

- relation de pré-ordre :

$$\mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \exists m, t, z, m', t', z' \;:\; \mathcal{A}^{<m,t,z>} \sqsubseteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}.$$



$\mathcal{A}$



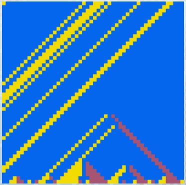
$\mathcal{B}$

$\mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{B}$

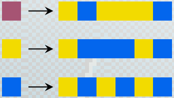
Groupage [N. Ollinger, 02]

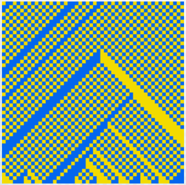
- relation de pré-ordre :

$$\mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \exists m, t, z, m', t', z' \;:\; \mathcal{A}^{<m,t,z>} \sqsubseteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}.$$



$\mathcal{A}$





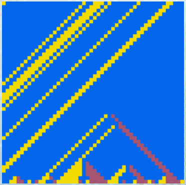
$\mathcal{B}$

$$\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}^{<6,6,0>}$$

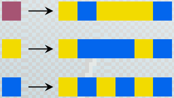
Groupage [N. Ollinger, 02]

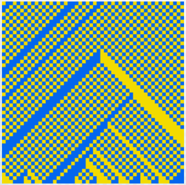
- relation de pré-ordre :

$$\mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \exists m, t, z, m', t', z' \;:\; \mathcal{A}^{<m,t,z>} \sqsubseteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}.$$



$\mathcal{A}$





$\mathcal{B}$

$\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}^{<6,6,0>}$

Définition

$\mathcal{B}$ est intrinsèquement universel si $\forall \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{B}$

Plan de l'exposé

Formalisation

- $E \subseteq$ AC une *classe* d'automates
- $\mathcal{P} \subseteq$ AC une *propriété*

Formalisation

- $E \subseteq$ AC une *classe* d'automates
- $\mathcal{P} \subseteq$ AC une *propriété*
- « mesure » de $\mathcal{P}$ dans E = densité

Formalisation

- $E \subseteq$ AC une *classe* d'automates
- $\mathcal{P} \subseteq$ AC une *propriété*
- « mesure » de $\mathcal{P}$ dans E = densité
- rayon fixé
- n états, $n \to \infty$

Formalisation

- $E \subseteq$ AC une *classe* d'automates
- $\mathcal{P} \subseteq$ AC une *propriété*
- « mesure » de $\mathcal{P}$ dans E = densité
- rayon fixé
- n états, $n \to \infty$

Définition

*Proportion limite d'*AC *de E ayant la propriété $\mathcal{P}$ quand $n \to \infty$:*

Formalisation

- $E \subseteq$ AC une *classe* d'automates
- $\mathcal{P} \subseteq$ AC une *propriété*
- « mesure » de $\mathcal{P}$ dans E = densité
- rayon fixé
- n états, $n \to \infty$

Définition

Proportion limite d'AC de E ayant la propriété $\mathcal{P}$ quand $n \to \infty$:

$$\Delta_E(\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{|E_n \cap \mathcal{P}|}{|E_n|}.$$

(la limite n'existe pas toujours)

Exemples

- un état q est quiescent si $\delta_{\mathcal{A}}(q, \dots, q) = q$

Exemples

- un état q est quiescent si $\delta_{\mathcal{A}}(q,\ldots,q) = q$
- $\mathcal{P}_q$ = « avoir un état quiescent »

$$\frac{|\mathrm{AC}_n \setminus \mathcal{P}_q|}{|\mathrm{AC}_n|} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

Exemples

- un état q est quiescent si $\delta_{\mathcal{A}}(q,\dots,q) = q$
- $\mathcal{P}_q$ = « avoir un état quiescent »

$$\frac{|\mathrm{AC}_n \backslash \mathcal{P}_q|}{|\mathrm{AC}_n|} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

- $\boxed{\Delta_{\mathrm{AC}}\left(\mathcal{P}_q\right) = 1 - \frac{1}{e}}$

Exemples

- un état q est quiescent si $\delta_{\mathcal{A}}(q, \ldots, q) = q$
- $\mathcal{P}_q$ = « avoir un état quiescent »

$$\frac{|\mathrm{AC}_n \backslash \mathcal{P}_q|}{|\mathrm{AC}_n|} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

- $\boxed{\Delta_{\mathrm{AC}}(\mathcal{P}_q) = 1 - \frac{1}{e}}$
- un état κ est envahissant si :
  $\kappa \in \{a_1, \ldots, a_k\} \Rightarrow \delta_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k) = \kappa$
- $\mathcal{P}_\kappa$ = « avoir un état envahissant »

Exemples

- un état q est quiescent si $\delta_{\mathcal{A}}(q,\ldots,q) = q$
- $\mathcal{P}_q$ = « avoir un état quiescent »

$$\frac{|\mathrm{AC}_n \backslash \mathcal{P}_q|}{|\mathrm{AC}_n|} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

- $\boxed{\Delta_{\mathrm{AC}}(\mathcal{P}_q) = 1 - \frac{1}{e}}$
- un état κ est envahissant si : $\kappa \in \{a_1,\ldots,a_k\} \Rightarrow \delta_{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_k) = \kappa$
- $\mathcal{P}_\kappa$ = « avoir un état envahissant »
- $\boxed{\Delta_{\mathrm{AC}}(\mathcal{P}_\kappa) = 0}$

Densité et relations locales

- « avoir un sous-automate non trivial »

Densité et relations locales

- « avoir un sous-automate non trivial »
- $\mathcal{P}_{\sqsubseteq} = \{\mathcal{A} : \exists \mathcal{B}, 1 < |B| < |A| \text{ et } \mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}\}$

Densité et relations locales

- « avoir un sous-automate non trivial »
- $\mathcal{P}_{\sqsubseteq} = \{\mathcal{A} : \exists \mathcal{B}, 1 < |B| < |A| \text{ et } \mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}\}$

Proposition (STACS'05)

Presque aucun AC *n'a de sous-automate non trivial :*

$$\Delta_{\text{AC}}\left(\mathcal{P}_{\sqsubseteq}\right) = 0$$

Densité et relations locales

- « avoir un sous-automate non trivial »
- $\mathcal{P}_{\sqsubseteq} = \{\mathcal{A} : \exists \mathcal{B}, 1 < |B| < |A| \text{ et } \mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}\}$

Proposition (STACS'05)

Presque aucun AC *n'a de sous-automate non trivial :*

$$\Delta_{\mathrm{AC}}\left(\mathcal{P}_{\sqsubseteq}\right) = 0$$

- « avoir un automate quotient non trivial »

Densité et relations locales

- « avoir un sous-automate non trivial »
- $\mathcal{P}_{\sqsubseteq} = \{\mathcal{A} : \exists \mathcal{B}, 1 < |B| < |A| \text{ et } \mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}\}$

Proposition (STACS'05)

Presque aucun AC *n'a de sous-automate non trivial :*

$$\Delta_{\mathrm{AC}}\left(\mathcal{P}_{\sqsubseteq}\right) = 0$$

- « avoir un automate quotient non trivial » d'une certaine taille
- $\mathcal{P}_{\trianglelefteq,f} = \{\mathcal{A} : \exists \mathcal{B}, |B| = f\left(|A|\right) \text{ et } \mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{A}\}$

Densité et relations locales

- « avoir un sous-automate non trivial »
- $\mathcal{P}_{\sqsubseteq} = \{\mathcal{A} : \exists \mathcal{B}, 1 < |B| < |A| \text{ et } \mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}\}$

Proposition (STACS'05)

Presque aucun AC *n'a de sous-automate non trivial :*

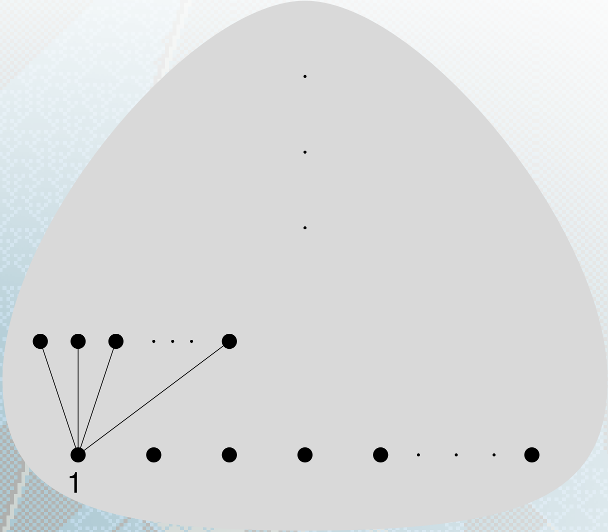
$$\Delta_{\text{AC}}\left(\mathcal{P}_{\sqsubseteq}\right) = 0$$

- « avoir un automate quotient non trivial » d'une certaine taille
- $\mathcal{P}_{\trianglelefteq,f} = \{\mathcal{A} : \exists \mathcal{B}, |B| = f(|A|) \text{ et } \mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{A}\}$

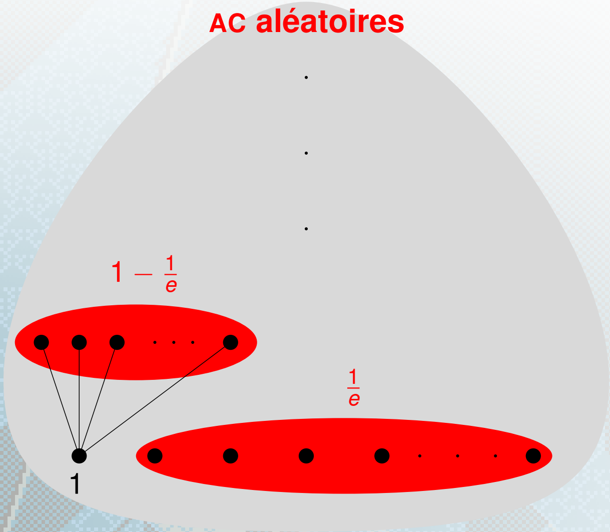
Proposition

Presque tous les AC *sont sans automate-quotient de taille f constante ou linéaire :* $\Delta_{\text{AC}}\left(\mathcal{P}_{\trianglelefteq,f}\right) = 0$

Automates cellulaires typiques et ordre $(\text{AC}, \sqsubseteq)$



Automates cellulaires typiques et ordre $(\text{AC}, \sqsubseteq)$



Plan de l'exposé

Paradigme de sélection

Définition

$\mathcal{A}$ est captif ($\mathcal{A} \in$ ACC) si toutes les transitions vérifient

$$\delta_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$$

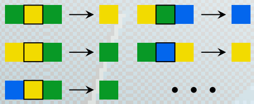
Paradigme de sélection

Définition

$\mathcal{A}$ *est* ***captif*** *($\mathcal{A} \in \mathrm{AC_C}$) si toutes les transitions vérifient*

$$\delta_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$$

Retour sur exemple :



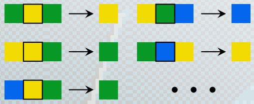
Paradigme de sélection

Définition

$\mathcal{A}$ est ***captif*** *($\mathcal{A} \in$ ACC) si toutes les transitions vérifient*

$$\delta_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$$

Retour sur exemple :



- presque aucun AC n'est captif : $\Delta_{\text{AC}}(\text{ACC}) = 0$

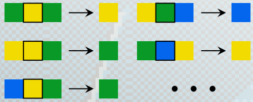
Paradigme de sélection

Définition

$\mathcal{A}$ *est* *captif* *(*$\mathcal{A} \in \mathrm{A^{C}C}$*) si toutes les transitions vérifient*

$$\delta_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$$

Retour sur exemple :



- presque aucun AC n'est captif : $\Delta_{\mathrm{AC}}(\mathrm{A^{C}C}) = 0$

Proposition (MFCS'04)

- $\mathcal{A} \in \mathrm{A^{C}C} \Leftrightarrow$ *tout sous-ensemble d'états induit un sous-automate*

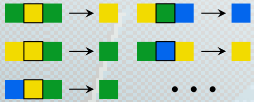
Paradigme de sélection

Définition

$\mathcal{A}$ est captif ($\mathcal{A} \in \mathrm{AC_C}$) si toutes les transitions vérifient

$$\delta_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$$

Retour sur exemple :



- presque aucun AC n'est captif : $\Delta_{\mathrm{AC}}\left(\mathrm{AC_C}\right) = 0$

Proposition (MFCS'04)

- $\mathcal{A} \in \mathrm{AC_C} \Leftrightarrow$ *tout sous-ensemble d'états induit un sous-automate*
- $\mathcal{A} \in \mathrm{AC_C}$ *et $\mathcal{A}$ réversible* $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1} \in \mathrm{AC_C}$

« Capturer » des AC

Comment reproduire le comportement d'un AC *avec un* ACC *?*

« Capturer » des AC

Comment reproduire le comportement d'un AC *avec un* ACC *?*

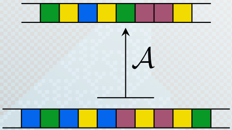
Transformation uniforme τ : $\boxed{\forall \mathcal{A} \in \text{AC}, \begin{cases} \mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \tau(\mathcal{A}) \\ \tau(\mathcal{A}) \in \text{ACC} \end{cases}}$

« Capturer » des AC

Comment reproduire le comportement d'un AC *avec un* ACc *?*

Transformation uniforme τ : $\boxed{\forall \mathcal{A} \in \text{AC}, \begin{cases} \mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \tau(\mathcal{A}) \\ \tau(\mathcal{A}) \in \text{ACc} \end{cases}}$

- $\mathcal{A}$ (n états, rayon r)

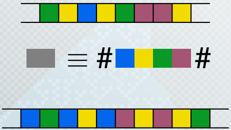


« Capturer » des AC

Comment reproduire le comportement d'un AC *avec un* ACc *?*

Transformation uniforme τ : $\boxed{\forall \mathcal{A} \in \text{AC}, \begin{cases} \mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \tau(\mathcal{A}) \\ \tau(\mathcal{A}) \in \text{ACc} \end{cases}}$

- $\mathcal{A}$ (n états, rayon r)
- blocs « alphabet » insérés

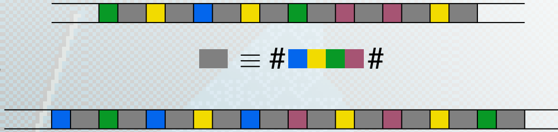


« Capturer » des AC

Comment reproduire le comportement d'un AC *avec un* ACC *?*

Transformation uniforme τ : $\boxed{\forall \mathcal{A} \in \text{AC}, \begin{cases} \mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \tau(\mathcal{A}) \\ \tau(\mathcal{A}) \in \text{ACC} \end{cases}}$

- $\mathcal{A}$ (*n* états, rayon *r*)
- blocs « alphabet » insérés

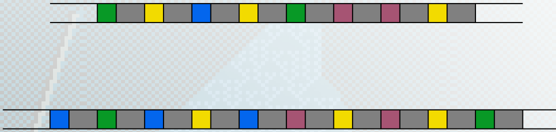


« Capturer » des AC

Comment reproduire le comportement d'un AC *avec un* ACc *?*

Transformation uniforme τ : $\boxed{\forall \mathcal{A} \in \text{AC}, \begin{cases} \mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \tau(\mathcal{A}) \\ \tau(\mathcal{A}) \in \text{ACc} \end{cases}}$

- $\mathcal{A}$ (*n* états, rayon *r*)
- blocs « alphabet » insérés

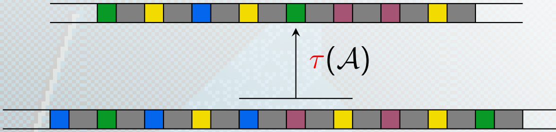


« Capturer » des AC

Comment reproduire le comportement d'un AC *avec un* ACc *?*

Transformation uniforme τ : $\boxed{\forall \mathcal{A} \in \text{AC}, \begin{cases} \mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \tau(\mathcal{A}) \\ \tau(\mathcal{A}) \in \text{ACc} \end{cases}}$

- $\mathcal{A}$ (n états, rayon r)
- blocs « alphabet » insérés
- $\tau(\mathcal{A}) \in$ ACc
  - $O(n)$ états, rayon $O(nr)$

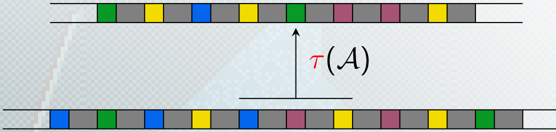


« Capturer » des AC

Comment reproduire le comportement d'un AC *avec un* ACC *?*

Transformation uniforme τ : $\boxed{\forall \mathcal{A} \in \text{AC}, \begin{cases} \mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \tau(\mathcal{A}) \\ \tau(\mathcal{A}) \in \text{ACC} \end{cases}}$

- $\mathcal{A}$ (n états, rayon r)
- blocs « alphabet » insérés
- $\tau(\mathcal{A}) \in$ ACC
  - $O(n)$ états, rayon $O(nr)$
  - $\mathcal{A}$ et $\tau(\mathcal{A})$ possèdent essentiellement les mêmes dynamiques
  - il existe des ACC intrinsèquement universels



Décidabilité

- un ACC n'est jamais nilpotent

Décidabilité

- un ACc n'est jamais nilpotent
- théorème de Rice sur les ensembles limites

Décidabilité

- un ACC n'est jamais nilpotent
- théorème de Rice sur les ensembles limites
- soit Π une propriété limite (un ensemble d'ensembles limites)

Problème de décision ($\mathrm{D}_{AC}(\Pi)$)

Entrée : $\mathcal{A} \in$ AC

Question : *est-ce que* $\Omega_{\mathcal{A}} \in \Pi$ *?*

Décidabilité

- un ACC n'est jamais nilpotent
- théorème de Rice sur les ensembles limites
- soit Π une propriété limite (un ensemble d'ensembles limites)

Problème de décision ($D_{AC}(\Pi)$)

Entrée : $\mathcal{A} \in$ AC

Question : *est-ce que* $\Omega_{\mathcal{A}} \in \Pi$ *?*

Théorème (J. Kari, 94)

Si Π non triviale, alors le problème ci-dessus est indécidable.

non triviale $\equiv \exists \mathcal{A}, \mathcal{B} \in$ AC : $\Omega_{\mathcal{A}} \in \Pi$ et $\Omega_{\mathcal{B}} \notin \Pi$

Décidabilité

- un ACC n'est jamais nilpotent
- théorème de Rice sur les ensembles limites
- soit Π une propriété limite (un ensemble d'ensembles limites)

Problème de décision ($\mathbb{D}_{\mathrm{ACC}}(\Pi)$)

Entrée : $\mathcal{A} \in$ ACC

Question : *est-ce que* $\Omega_{\mathcal{A}} \in \Pi$?

Décidabilité

- un ACC n'est jamais nilpotent
- théorème de Rice sur les ensembles limites
- soit Π une propriété limite (un ensemble d'ensembles limites)

Problème de décision ($\mathrm{D}_{ACC}(\Pi)$)

Entrée : $\mathcal{A} \in$ ACC

Question : *est-ce que* $\Omega_{\mathcal{A}} \in \Pi$ *?*

- si Π non triviale (pour ACC), le problème est-il indécidable ?

Décidabilité

- un $\mathcal{A}\mathcal{C}c$ n'est jamais nilpotent
- théorème de Rice sur les ensembles limites
- soit Π une propriété limite (un ensemble d'ensembles limites)

Problème de décision ($\mathbb{D}_{\mathcal{A}\mathcal{C}c}(\Pi)$)

Entrée : $\mathcal{A} \in \mathcal{A}\mathcal{C}c$

Question : *est-ce que* $\Omega_{\mathcal{A}} \in \Pi$ *?*

- PAS TOUJOURS ! ex : $\Pi = \{ Q^{\mathcal{R}} : Q \text{ alphabet} \}$

Décidabilité

- un ACc n'est jamais nilpotent
- théorème de Rice sur les ensembles limites
- soit Π une propriété limite (un ensemble d'ensembles limites)

Problème de décision ($\mathrm{D}_{\text{ACc}}(\Pi)$)

Entrée : $\mathcal{A} \in$ ACc

Question : *est-ce que* $\Omega_{\mathcal{A}} \in \Pi$ *?*

- PAS TOUJOURS ! ex : $\Pi = \{Q^{\mathcal{R}} : Q \text{ alphabet}\}$
- Fait : si $\mathcal{A} \in$ ACc alors $\Omega_{\mathcal{A}} \in \Pi \Leftrightarrow \mathcal{A}$ surjectif

Décidabilité

- un ACC n'est jamais nilpotent
- théorème de Rice sur les ensembles limites
- soit Π une propriété limite (un ensemble d'ensembles limites)

Problème de décision ($\mathbb{D}_{\mathrm{ACC}}(\Pi)$)

Entrée : $\mathcal{A} \in$ ACC

Question : *est-ce que* $\Omega_{\mathcal{A}} \in \Pi$ *?*

- PAS TOUJOURS ! ex : $\Pi = \{Q^{\mathcal{R}} : Q \text{ alphabet}\}$
- Fait : si $\mathcal{A} \in$ ACC alors $\Omega_{\mathcal{A}} \in \Pi \Leftrightarrow \mathcal{A}$ surjectif
- La surjectivité est une propriété décidable (en dimension 1)

Décidabilité

- un ACC n'est jamais nilpotent
- théorème de Rice sur les ensembles limites
- soit Π une propriété limite (un ensemble d'ensembles limites)

Problème de décision ($\mathrm{D}_{\mathrm{ACC}}(\Pi)$)

Entrée : $\mathcal{A} \in$ ACC

Question : *est-ce que* $\Omega_{\mathcal{A}} \in \Pi$ *?*

Théorème (MFCS'04)

$\exists\Phi$ *injective telle que :* $\forall\Pi$ *non triviale,* $\mathrm{D}_{\mathrm{ACC}}(\Phi(\Pi))$ *est indécidable.*

Loi zéro-un

- $\mathcal{P}$: propriété des automates captifs ($\mathcal{P} \subseteq$ ACc)

Définition

- $\mathcal{P}$ *est croissante si* $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in$ ACc *avec* $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ *on a* $\mathcal{A} \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{P}$
- $\mathcal{P}$ *est décroissante si* $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in$ ACc *avec* $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ *on a* $\mathcal{B} \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{P}$

Loi zéro-un

- $\mathcal{P}$: propriété des automates captifs ($\mathcal{P} \subseteq \mathrm{A^{C}c}$)

Définition

- $\mathcal{P}$ *est croissante si* $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{A^{C}c}$ *avec* $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ *on a* $\mathcal{A} \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{P}$
- $\mathcal{P}$ *est décroissante si* $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{A^{C}c}$ *avec* $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ *on a* $\mathcal{B} \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{P}$

Théorème (STACS'05)

Si $\mathcal{P}$ *est non-triviale alors :*

- $\mathcal{P}$ *croissante* $\Rightarrow \Delta_{\mathrm{A^{C}c}}(\mathcal{P}) = 1$
- $\mathcal{P}$ *décroissante* $\Rightarrow \Delta_{\mathrm{A^{C}c}}(\mathcal{P}) = 0$

Corollaires de la loi zéro-un

+

Presque tous les ACC sont intrinsèquement universels.

Corollaires de la loi zéro-un

+

Presque tous les ACC sont intrinsèquement universels.

—

Presqu'aucun ACC n'est surjectif.

Corollaires de la loi zéro-un

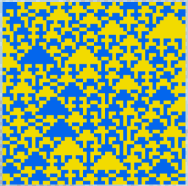
+

Presque tous les ACC sont intrinsèquement universels.

—

Presqu'aucun ACC n'est surjectif.

- on peut caractériser des familles d'ACC « chaotiques » (MFCS'04)



- ACC additifs,

Corollaires de la loi zéro-un

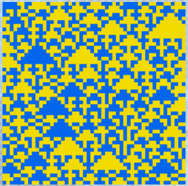
+

Presque tous les ACc sont intrinsèquement universels.

−

Presqu'aucun ACc n'est surjectif.

- on peut caractériser des familles d'ACc « chaotiques » (MFCS'04)



- ACc additifs,
- ACc permutifs,

Corollaires de la loi zéro-un

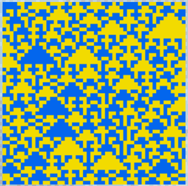
+

Presque tous les ACc sont intrinsèquement universels.

−

Presqu'aucun ACc n'est surjectif.

- on peut caractériser des familles d'ACc « chaotiques » (MFCS'04)



- ACc additifs,
- ACc permutifs,
- ACc expansifs (si rayon 1)

Presque tous les ACC sont universels, mais...

Presque tous les ACC sont universels, mais...

Théorème (STACS'05)

L'universalité intrinsèque est indécidable sur ACC (même à rayon fixé).

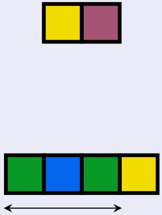
Presque tous les ACC sont universels, mais...

Théorème (STACS'05)

L'universalité intrinsèque est indécidable sur ACC (même à rayon fixé).

Démonstration.

- réduction du cas général, construction τ' : AC $\rightarrow$ ACC



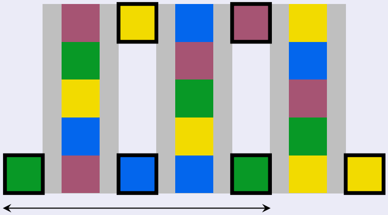
Presque tous les ACC sont universels, mais...

Théorème (STACS'05)

L'universalité intrinsèque est indécidable sur ACC (même à rayon fixé).

Démonstration.

- réduction du cas général, construction τ' : AC $\rightarrow$ ACC



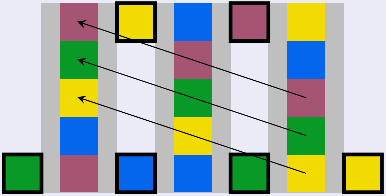
Presque tous les ACc sont universels, mais...

Théorème (STACS'05)

L'universalité intrinsèque est indécidable sur ACc (même à rayon fixé).

Démonstration.

- réduction du cas général, construction τ' : AC $\to$ ACc



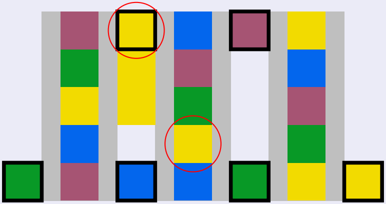
Presque tous les ACC sont universels, mais...

Théorème (STACS'05)

L'universalité intrinsèque est indécidable sur ACC (même à rayon fixé).

Démonstration.

- réduction du cas général, construction τ' : AC $\rightarrow$ ACC



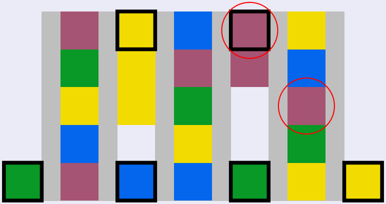
Presque tous les ACC sont universels, mais...

Théorème (STACS'05)

L'universalité intrinsèque est indécidable sur ACC (même à rayon fixé).

Démonstration.

- réduction du cas général, construction τ' : AC $\rightarrow$ ACC



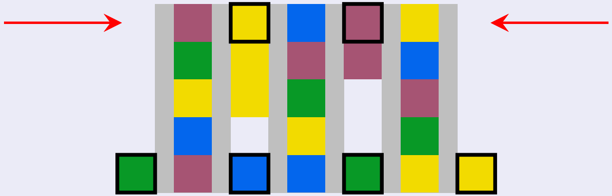
Presque tous les ACC sont universels, mais...

Théorème (STACS'05)

L'universalité intrinsèque est indécidable sur ACC (même à rayon fixé).

Démonstration.

- réduction du cas général, construction τ' : AC $\rightarrow$ ACC



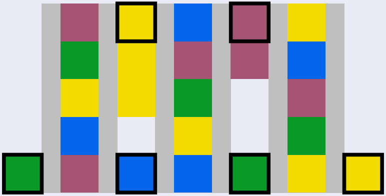
Presque tous les ACc sont universels, mais...

Théorème (STACS'05)

L'universalité intrinsèque est indécidable sur ACc (même à rayon fixé).

Démonstration.

- réduction du cas général, construction τ' : AC $\to$ ACc



- $\tau'(\mathcal{A})$: $O(n)$ états, rayon $O(r)$

Plan de l'exposé

1. Le modèle des automates cellulaires
2. Densité et combinatoire
3. Automates cellulaires captifs
4. Structure de l'ensemble des AC

Classifications et complexités

- de nombreux travaux dans la littérature

Classifications et complexités

- de nombreux travaux dans la littérature
- exemples de classifications :
  - classification empirique de S. Wolfram (années 80)
  - classification topologique de P. Kůrka (années 90)
- exemples de notions de complexité :
  - nombre d'états
  - complexité de Kolmogorov de la règle locale
  - variation d'entropie
  - nombre de cycles

Classifications et complexités

- de nombreux travaux dans la littérature
- exemples de classifications :
  - classification empirique de S. Wolfram (années 80)
  - classification topologique de P. Kůrka (années 90)
- exemples de notions de complexité :
  - nombre d'états
  - complexité de Kolmogorov de la règle locale
  - variation d'entropie
  - nombre de cycles

$\rightsquigarrow$ Notion centrale : pré-ordres sur AC (relations de simulation)

Classifications et complexités

- de nombreux travaux dans la littérature
- exemples de classifications :
  - classification empirique de S. Wolfram (années 80)
  - classification topologique de P. Kůrka (années 90)
- exemples de notions de complexité :
  - nombre d'états
  - complexité de Kolmogorov de la règle locale
  - variation d'entropie
  - nombre de cycles

$\leadsto$ Notion centrale : pré-ordres sur AC (relations de simulation)

- relation d'équivalence induite
- notions de complexité compatibles
- structure de l'ensemble des AC

Exemples de simulations

changements d'échelle + relation sur les règles locales

- $\mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists m, t, z, m', t', z' \; : \; \mathcal{A}^{<m,t,z>} \sqsubseteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$

Exemples de simulations

changements d'échelle + relation sur les règles locales

- $\mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \exists m, t, z, m', t', z' \;:\; \mathcal{A}^{<m,t,z>} \sqsubseteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$
- $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq} \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \exists m, t, z, m', t', z' \;:\; \mathcal{A}^{<m,t,z>} \trianglelefteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$

Exemples de simulations

changements d'échelle + relation sur les règles locales

- $\mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists m, t, z, m', t', z' : \mathcal{A}^{<m,t,z>} \sqsubseteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$
- $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq} \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists m, t, z, m', t', z' : \mathcal{A}^{<m,t,z>} \trianglelefteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$
- $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq\!\sqsubseteq} \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists m, t, z, m', t', z' : \mathcal{A}^{<m,t,z>} \trianglelefteq\!\sqsubseteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$

Exemples de simulations

changements d'échelle + relation sur les règles locales

- $\mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \exists m, t, z, m', t', z' \;:\; \mathcal{A}^{<m,t,z>} \sqsubseteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$
- $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq} \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \exists m, t, z, m', t', z' \;:\; \mathcal{A}^{<m,t,z>} \trianglelefteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$
- $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq} \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \exists m, t, z, m', t', z' \;:\; \mathcal{A}^{<m,t,z>} \trianglelefteq\!\sqsubseteq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$

Proposition

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq} & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
\preceq_{\trianglelefteq} & & \not\rightleftarrows & & \preceq_{\sqsubseteq} \\
\not\updownarrow & & \times & & \not\updownarrow \\
\sqsubseteq & & \not\rightleftarrows & & \trianglelefteq
\end{array}
$$

« $\longrightarrow$ » : inclusion stricte.
« $\not\longrightarrow$ » : non-inclusion.

Paramètres de complexité

Paramètres de complexité

Définition

ρ : AC $\longrightarrow (X, \leq)$ *est un paramètre de complexité pour* $\preceq$ *si*

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Rightarrow \rho(\mathcal{A}) \leq \rho(\mathcal{B})$$

Paramètres de complexité

Définition

ρ : AC $\longrightarrow (X, \leq)$ *est un paramètre de complexité pour* $\preceq$ *si*

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Rightarrow \rho(\mathcal{A}) \leq \rho(\mathcal{B})$$

- le nombre d'états n'est pas un paramètre de complexité pour $\preceq_{\sqsubseteq}$, ni pour $\preceq_{\trianglelefteq}$, ni pour $\preceq_{\trianglelefteq\!\sqsubseteq}$

Paramètres de complexité

Définition

ρ : AC $\longrightarrow (X, \leq)$ *est un paramètre de complexité pour* $\preceq$ *si*

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Rightarrow \rho(\mathcal{A}) \leq \rho(\mathcal{B})$$

- le nombre d'états n'est pas un paramètre de complexité pour $\preceq_{\sqsubseteq}$, ni pour $\preceq_{\trianglelefteq}$, ni pour $\preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq}$
- exemples de paramètres :
  - nombre de cycles (pour $\preceq_{\sqsubseteq}$)
  - hiérarchie de Chomsky sur le langage limite (pour $\preceq_{\trianglelefteq}$)
  - complexité de communication (pour $\preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq}$)

Paramètres de complexité

Définition

ρ : AC $\longrightarrow (X, \leq)$ *est un paramètre de complexité pour* $\preceq$ *si*

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Rightarrow \rho(\mathcal{A}) \leq \rho(\mathcal{B})$$

- le nombre d'états n'est pas un paramètre de complexité pour $\preceq_{\sqsubseteq}$, ni pour $\preceq_{\trianglelefteq}$, ni pour $\preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq}$
- exemples de paramètres :
  - nombre de cycles (pour $\preceq_{\sqsubseteq}$)
  - hiérarchie de Chomsky sur le langage limite (pour $\preceq_{\trianglelefteq}$)
  - complexité de communication (pour $\preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq}$)

Théorème (TCS — avec C. Dürr et I. Rapaport)

Les automates cellulaires additifs ont une complexité de communication bornée.

Produits cartésiens et pré-ordres

- notion de distance entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans $(\text{AC}, \preceq_{\trianglelefteq})$
- $\mathfrak{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) =$ longueur de la plus longue chaîne menant de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$

Produits cartésiens et pré-ordres

- notion de distance entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans $(\text{AC}, \preceq_{\trianglelefteq\!\sqsubseteq})$
- $\mathfrak{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) =$ longueur de la plus longue chaîne menant de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$

Proposition

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ $\mathcal{A}$ *tel que* $\mathfrak{d}(\mathcal{A}, \mathcal{A} \times \mathcal{A}) \geq n$

Produits cartésiens et pré-ordres

- notion de distance entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans $(\text{AC}, \preceq_{\trianglelefteq})$
- $\mathfrak{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) =$ longueur de la plus longue chaîne menant de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$

Proposition

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ $\mathcal{A}$ *tel que* $\mathfrak{d}(\mathcal{A}, \mathcal{A} \times \mathcal{A}) \geq n$

Proposition

$\exists$ $\mathcal{A}$ *tel que* $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq} \cdots$ *est strictement croissante.*

Produits cartésiens et pré-ordres

- notion de distance entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans $(\text{AC}, \preceq_{\trianglelefteq})$
- $\mathfrak{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) =$ longueur de la plus longue chaîne menant de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$

Proposition

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists\ \mathcal{A}$ *tel que* $\mathfrak{d}(\mathcal{A}, \mathcal{A} \times \mathcal{A}) \geq n$

Proposition

$\exists\ \mathcal{A}$ *tel que* $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq} \cdots$ *est strictement croissante.*

- $\mathcal{A}$ = « machine de Turing à 1 tête »

Produits cartésiens et pré-ordres

- notion de distance entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans $(\text{AC}, \preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq})$
- $\mathfrak{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) =$ longueur de la plus longue chaîne menant de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$

Proposition

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ $\mathcal{A}$ *tel que* $\mathfrak{d}(\mathcal{A}, \mathcal{A} \times \mathcal{A}) \geq n$

Proposition

$\exists$ $\mathcal{A}$ *tel que* $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq} \cdots$ *est strictement croissante.*

- $\mathcal{A}$ = « machine de Turing à 1 tête »

Proposition

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *universel* $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ *ou* $\mathcal{B}$ *universel (vrai pour* $\preceq_{\sqsubseteq}$ *et* $\preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq}$*).*

Produits cartésiens limites (ECCS'05)

Définition

Une extension du produit cartésien : $\mathcal{A} \mapsto \overset{\times}{\mathcal{A}}$

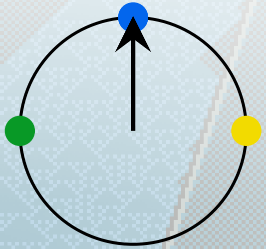
- $\forall n \; \underbrace{\mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}}_{n} \preceq_{\trianglelefteq} \overset{\times}{\mathcal{A}}$
- $\overset{\times}{\mathcal{A}}$ *universel* $\Rightarrow \mathcal{A}$ *universel*

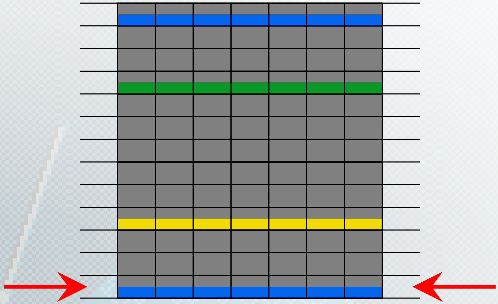
Produits cartésiens limites : idées de la construction

- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps

Produits cartésiens limites : idées de la construction

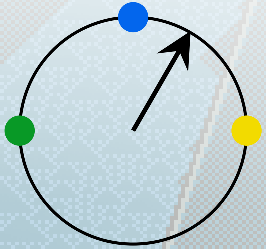
- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps

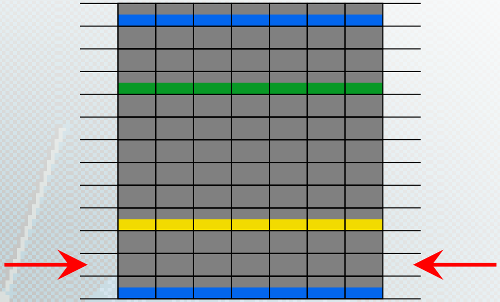




Produits cartésiens limites : idées de la construction

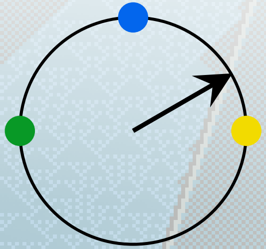
- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps

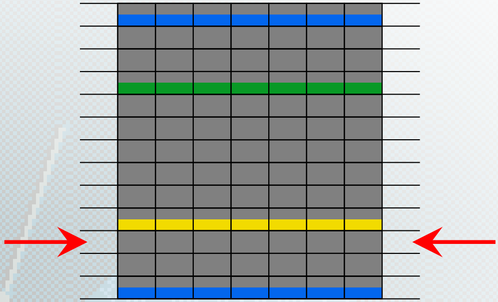




Produits cartésiens limites : idées de la construction

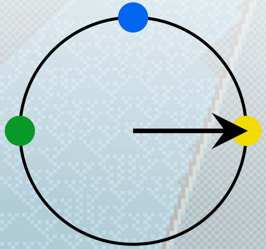
- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps

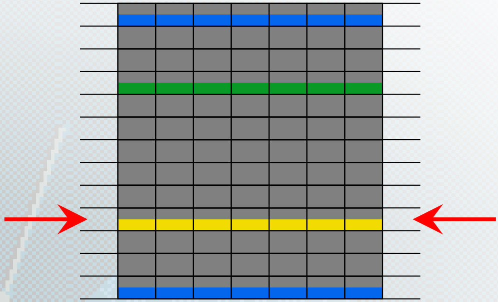




Produits cartésiens limites : idées de la construction

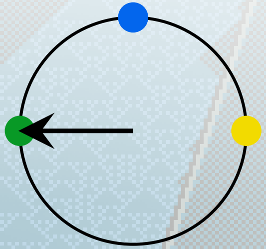
- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps

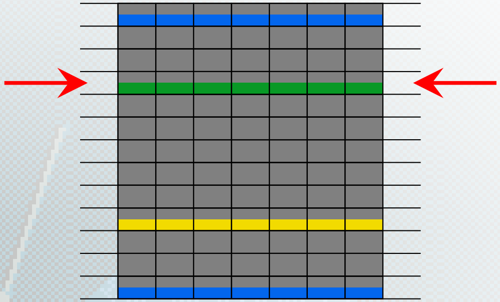




Produits cartésiens limites : idées de la construction

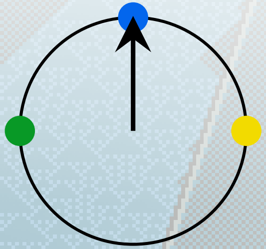
- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps

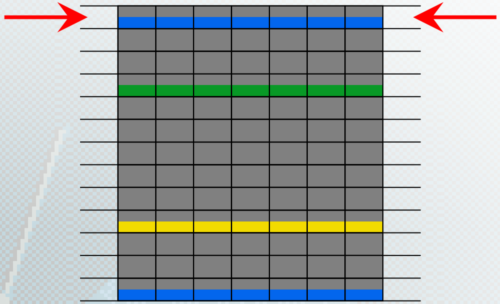




Produits cartésiens limites : idées de la construction

- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps



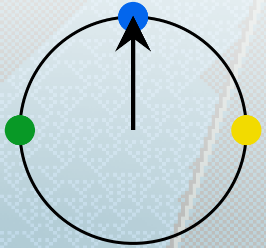


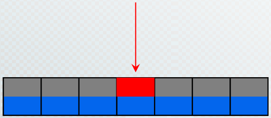
Produits cartésiens limites : idées de la construction

- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps
- transfert du découpage temporel vers un découpage spatial

Produits cartésiens limites : idées de la construction

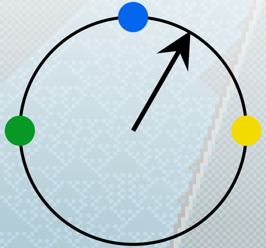
- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps
- transfert du découpage temporel vers un découpage spatial

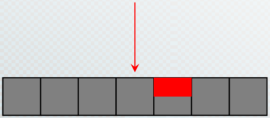




Produits cartésiens limites : idées de la construction

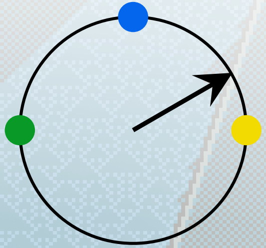
- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps
- transfert du découpage temporel vers un découpage spatial

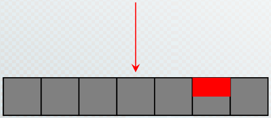




Produits cartésiens limites : idées de la construction

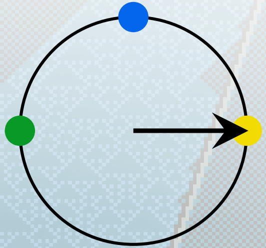
- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps
- transfert du découpage temporel vers un découpage spatial

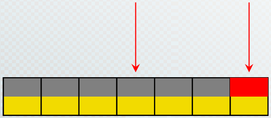




Produits cartésiens limites : idées de la construction

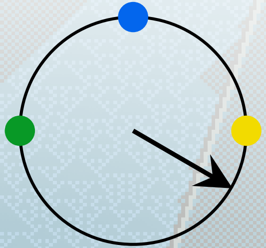
- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps
- transfert du découpage temporel vers un découpage spatial

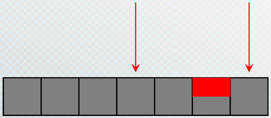




Produits cartésiens limites : idées de la construction

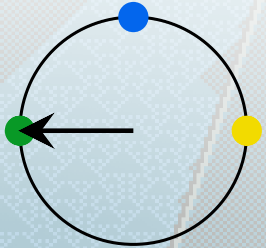
- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps
- transfert du découpage temporel vers un découpage spatial

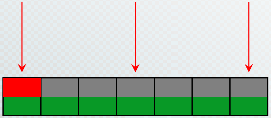




Produits cartésiens limites : idées de la construction

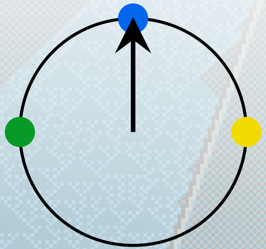
- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps
- transfert du découpage temporel vers un découpage spatial

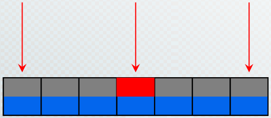




Produits cartésiens limites : idées de la construction

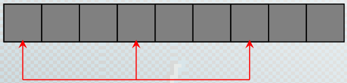
- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps
- transfert du découpage temporel vers un découpage spatial





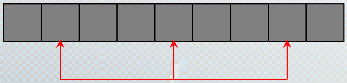
Produits cartésiens limites : idées de la construction

- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps
- transfert du découpage temporel vers un découpage spatial



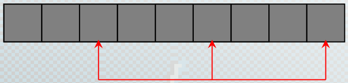
Produits cartésiens limites : idées de la construction

- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps
- transfert du découpage temporel vers un découpage spatial



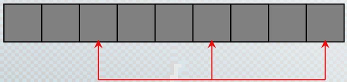
Produits cartésiens limites : idées de la construction

- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps
- transfert du découpage temporel vers un découpage spatial



Produits cartésiens limites : idées de la construction

- automates métronomes $\rightsquigarrow$ découpage régulier du temps
- transfert du découpage temporel vers un découpage spatial



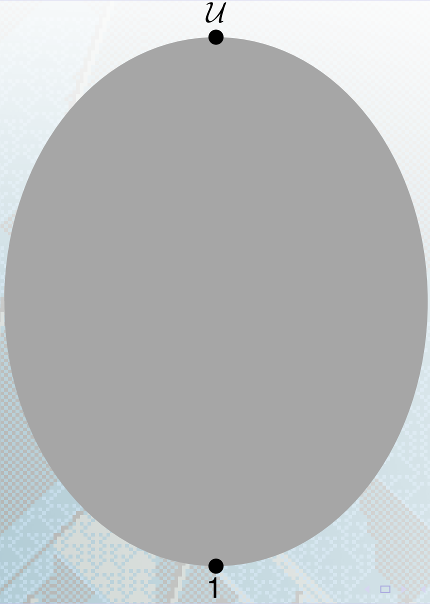
$$\forall n, \underbrace{\mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}}_{n} \preceq_{\trianglelefteq} \overset{\times}{\mathcal{A}}$$

Produits cartésiens limites (suite et fin)

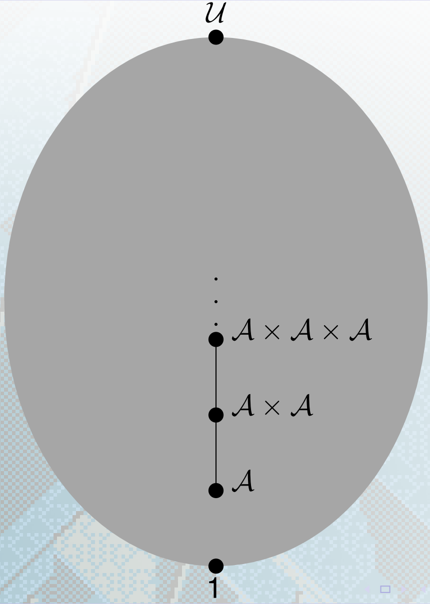
Comment garantir que $\overset{\times}{\mathcal{A}}$ n'est pas universel si $\mathcal{A}$ ne l'est pas ?

- métronomes contrôlés
  - détection des désynchronisations (états envahissants)
  - complexité globale limitée (métronomes réversibles)
- vérifications de cohérence dans le transfert temps $\rightarrow$ espace

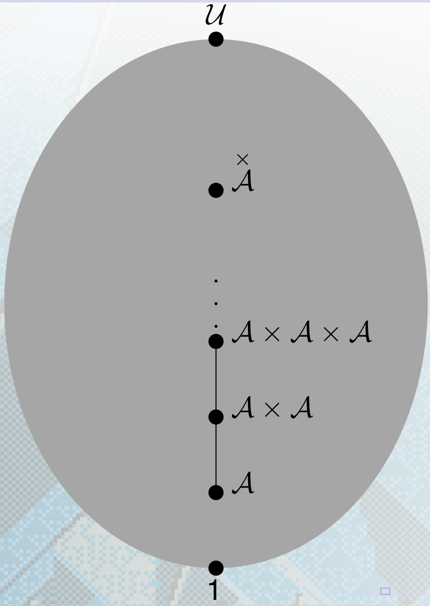
Structure de $(\text{AC}, \preceq_{\trianglelefteq})$



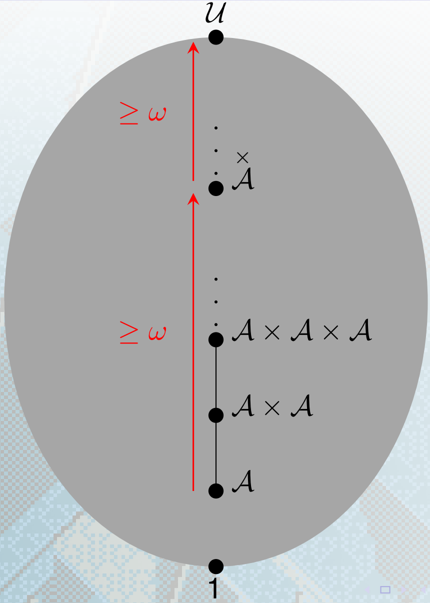
Structure de $(\text{AC}, \preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq})$



Structure de $(\text{AC}, \preceq_{\trianglelefteq})$



Structure de $(\text{AC}, \preceq_{\trianglelefteq\!\sqsubseteq})$



Perspectives

Perspectives

- probabilité qu'un AC soit universel
- propriétés « dynamiques » des AC et A^{C}C typiques
- hauteur d'un AC typique dans les pré-ordres de simulation

Perspectives

- probabilité qu'un AC soit universel
- propriétés « dynamiques » des AC et ACC typiques
- hauteur d'un AC typique dans les pré-ordres de simulation

- notions d'universalité dans les pré-ordre $\preceq_{\trianglelefteq}$ et $\preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq}$:
  - pas d'universel pour $\preceq_{\trianglelefteq}$?
  - des universels pour $\preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq}$ non intrinsèquement universels ?
- hauteur des pré-ordres