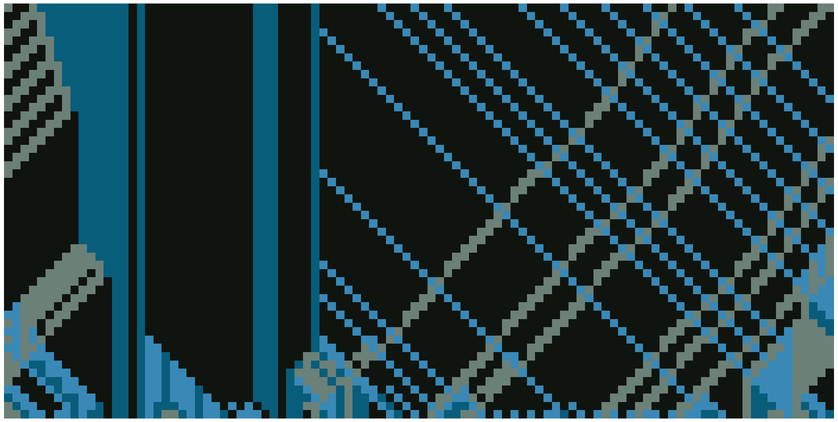
Autour de l'universalité dans les automates cellulaires



29 mars 2005, GREYC, Caen

Guillaume Theyssier (LIP, ENS Lyon, France)

Le modèle des AC

Généralités sur le modèle :

Généralités sur le modèle :

– AC = système dynamique discret particulier

Généralités sur le modèle :

- AC = système dynamique discret particulier
- simplicité formelle
  - déterminisme
  - localité
  - uniformité
  - synchronisme

Généralités sur le modèle :

- AC = système dynamique discret particulier
- simplicité formelle
  - déterminisme
  - localité
  - uniformité
  - synchronisme
- complexité dans la dynamique
  - individuelle (universalité, chaos, etc)
  - collective (classification)

Généralités sur le modèle :

- AC = système dynamique discret particulier
- simplicité formelle
  - déterminisme
  - localité
  - uniformité
  - synchronisme
- complexité dans la dynamique
  - individuelle (universalité, chaos, etc)
  - collective (classification)

(c'est aussi un modèle de calcul massivement parallèle)

Formellement, un automate cellulaire $\mathcal{A}$ est un quadruplet $(\mathbb{Z}^d, N, S, \delta)$:

$\mathbb{Z}^d$	réseau de cellules
S	ensemble fini d'états
$N = (\overrightarrow{n_1}, \ldots, \overrightarrow{n_k})$	vecteurs de $\mathbb{Z}^d$, voisinage de $\mathcal{A}$
$\delta : S^k \to S$	règle de transition locale

Formellement, un automate cellulaire $\mathcal{A}$ est un quadruplet $(\mathbb{Z}^d, N, S, \delta)$:

$\mathbb{Z}^d$	réseau de cellules
S	ensemble fini d'états
$N = (\overrightarrow{n_1}, \ldots, \overrightarrow{n_k})$	vecteurs de $\mathbb{Z}^d$, voisinage de $\mathcal{A}$
$\delta : S^k \to S$	règle de transition locale

Une configuration est une fonction de $\mathbb{Z}^d$ dans S.

Formellement, un automate cellulaire $\mathcal{A}$ est un quadruplet $(\mathbb{Z}^d, N, S, \delta)$:

$$\begin{array}{rl} \mathbb{Z}^d & \text{réseau de cellules} \\ S & \text{ensemble fini d'états} \\ N = (\overrightarrow{n_1}, \ldots, \overrightarrow{n_k}) & \text{vecteurs de } \mathbb{Z}^d\text{, voisinage de } \mathcal{A} \\ \delta : S^k \to S & \text{règle de transition locale} \end{array}$$

Une configuration est une fonction de $\mathbb{Z}^d$ dans S.

$\rightsquigarrow$ fonction globale de $\mathcal{A}$ sur les configurations :

Formellement, un automate cellulaire $\mathcal{A}$ est un quadruplet $(\mathbb{Z}^d, N, S, \delta)$:

$\mathbb{Z}^d$	réseau de cellules
S	ensemble fini d'états
$N = (\overrightarrow{n_1}, \ldots, \overrightarrow{n_k})$	vecteurs de $\mathbb{Z}^d$, voisinage de $\mathcal{A}$
$\delta : S^k \to S$	règle de transition locale

Une configuration est une fonction de $\mathbb{Z}^d$ dans S.

$\rightsquigarrow$ fonction globale de $\mathcal{A}$ sur les configurations :

$$\forall c \in S^{\mathbb{Z}^d}, \forall \overrightarrow{z} \in \mathbb{Z}^d : \big(\mathcal{A}(c)\big)(\overrightarrow{z}) = \delta\big(c(\overrightarrow{z} + \overrightarrow{n_1}), \ldots, c(\overrightarrow{z} + \overrightarrow{n_k})\big)$$

Formellement, un automate cellulaire $\mathcal{A}$ est un quadruplet $(\mathbb{Z}^d, N, S, \delta)$:

$\mathbb{Z}^d$	réseau de cellules
S	ensemble fini d'états
$N = (\overrightarrow{n_1}, \ldots, \overrightarrow{n_k})$	vecteurs de $\mathbb{Z}^d$, voisinage de $\mathcal{A}$
$\delta : S^k \to S$	règle de transition locale

Une configuration est une fonction de $\mathbb{Z}^d$ dans S.

$\rightsquigarrow$ fonction globale de $\mathcal{A}$ sur les configurations :

$$\forall c \in S^{\mathbb{Z}^d}, \forall \overrightarrow{z} \in \mathbb{Z}^d : \big(\mathcal{A}(c)\big)(\overrightarrow{z}) = \delta\big(c(\overrightarrow{z} + \overrightarrow{n_1}), \ldots, c(\overrightarrow{z} + \overrightarrow{n_k})\big)$$

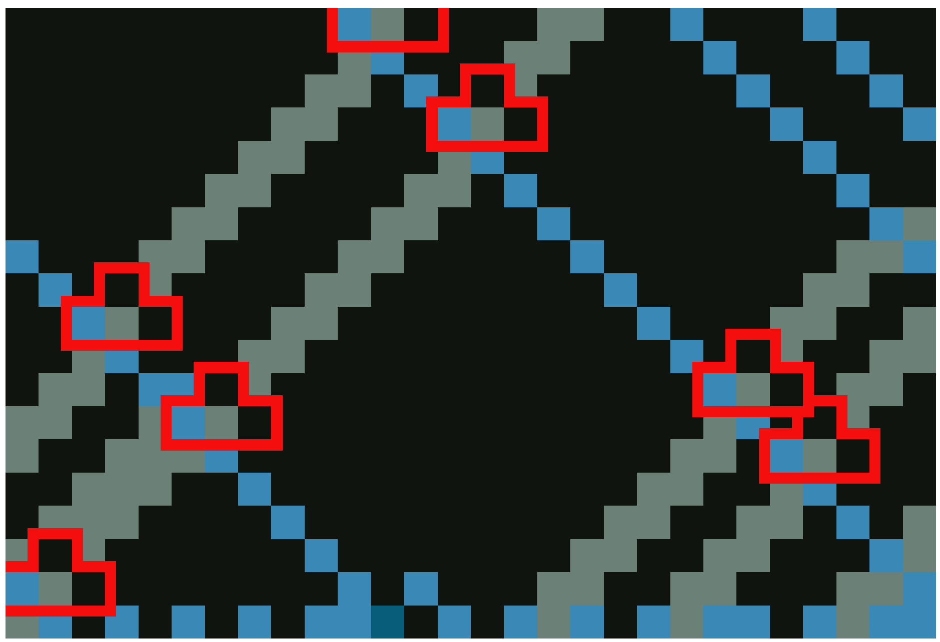
Exemple. translation de vecteur $\overrightarrow{v}$: $\sigma_{\overrightarrow{v}} = (\mathbb{Z}^d, S, \{\overrightarrow{v}\}, Id)$

Diagramme espace-temps

$$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, N = \{-1, O, 1\}, S = \{\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare\}, \delta)$$

$$\delta(\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare) = \blacksquare$$

$$\vdots$$

$\cdots$  $\cdots$

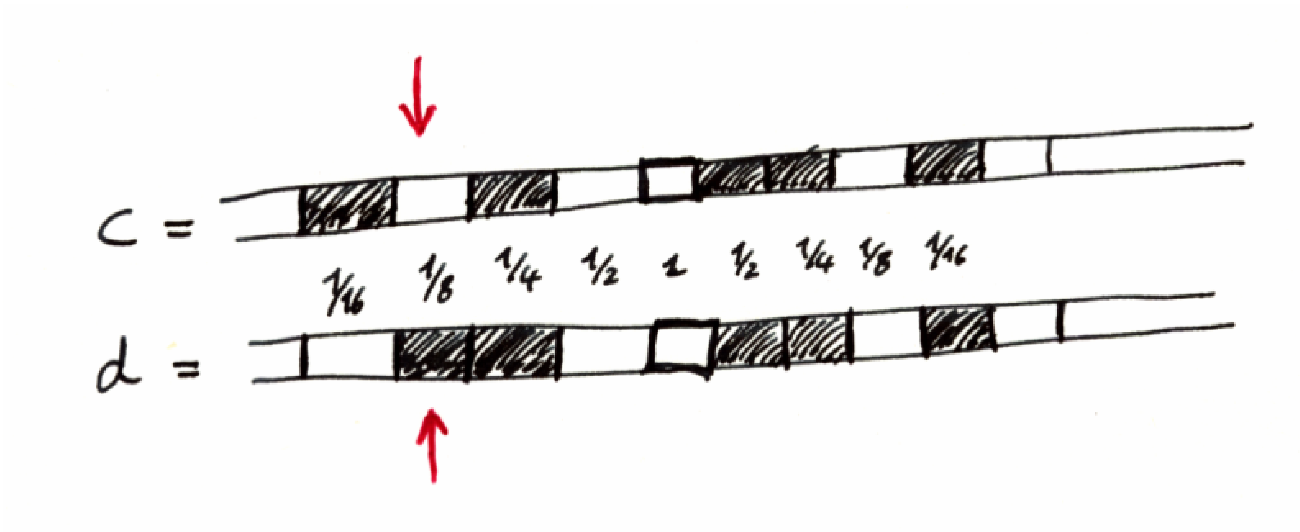
(le temps progresse de bas en haut)

L'espace des configurations $S^{\mathbb{Z}}$

Définition. $\mathfrak{d}(c,d) = 2^{-\min\{\|z\|_\infty : c(z) \neq d(z)\}}$.

L'espace des configurations $S^{\mathbb{Z}}$

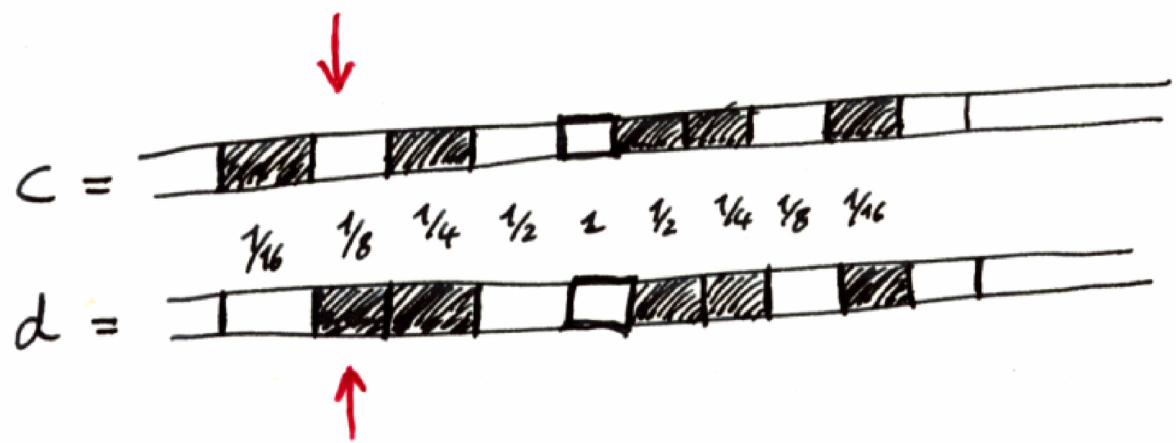
Définition. $\mathfrak{d}(c,d) = 2^{-\min\{\|z\|_\infty : c(z) \neq d(z)\}}$.



$$\mathfrak{d}(c,d) = \frac{1}{8}$$

L'espace des configurations $S^{\mathbb{Z}}$

Définition. $\mathfrak{d}(c,d) = 2^{-\min\{\|z\|_\infty : c(z) \neq d(z)\}}$.



$$\mathfrak{d}(c,d) = \frac{1}{8}$$

Fait. $(S^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{d})$ est compact

Caractérisation topologique des AC

Caractérisation topologique des AC

Théorème (Hedlund, 69). Une fonction sur $S^{\mathbb{Z}}$ est la fonction globale d'un AC si et seulement si elle est continue pour $\mathfrak{d}$ et commute avec les translations.

Caractérisation topologique des AC

Théorème (Hedlund, 69). Une fonction sur $S^{\mathbb{Z}}$ est la fonction globale d'un AC si et seulement si elle est continue pour $\mathfrak{d}$ et commute avec les translations.

Corollaire. Un AC bijectif est réversible.

Caractérisation topologique des AC

Théorème (Hedlund, 69). Une fonction sur $S^{\mathbb{Z}}$ est la fonction globale d'un AC si et seulement si elle est continue pour $\mathfrak{d}$ et commute avec les translations.

Corollaire. Un AC bijectif est réversible.

$\rightsquigarrow$ Étude des questions classiques de la théorie des systèmes dynamiques

Caractérisation topologique des AC

Théorème (Hedlund, 69). Une fonction sur $S^{\mathbb{Z}}$ est la fonction globale d'un AC si et seulement si elle est continue pour $\mathfrak{d}$ et commute avec les translations.

Corollaire. Un AC bijectif est réversible.

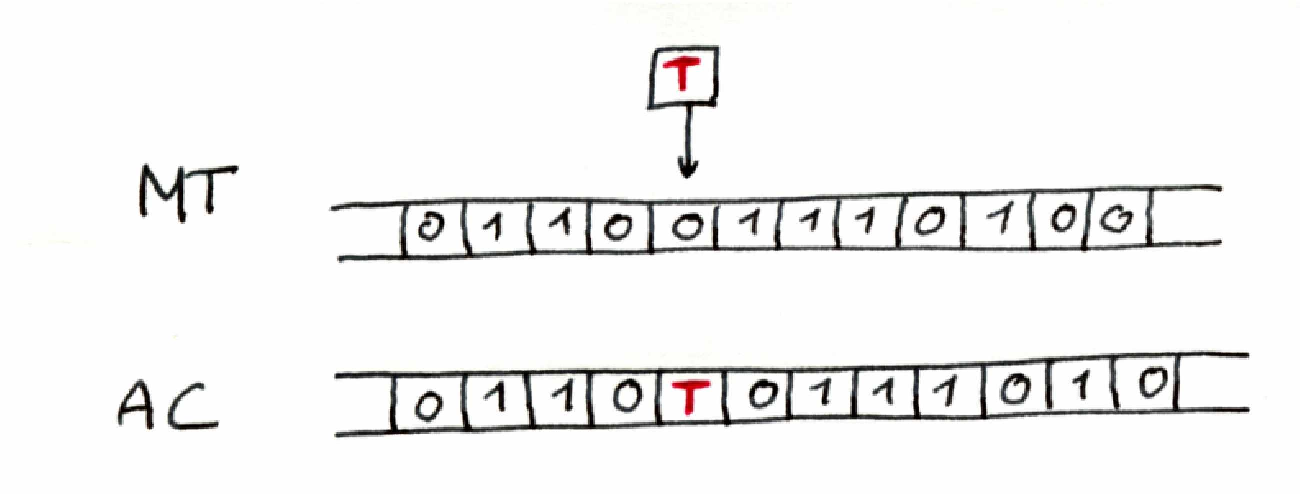
$\rightsquigarrow$ Étude des questions classiques de la théorie des systèmes dynamiques

Exemple : nilpotence $= \exists c_0 \exists T \forall c : \mathcal{A}^T(c) = c_0$
- indécidable ("la halte des AC")
- problématique des périodes transitoires

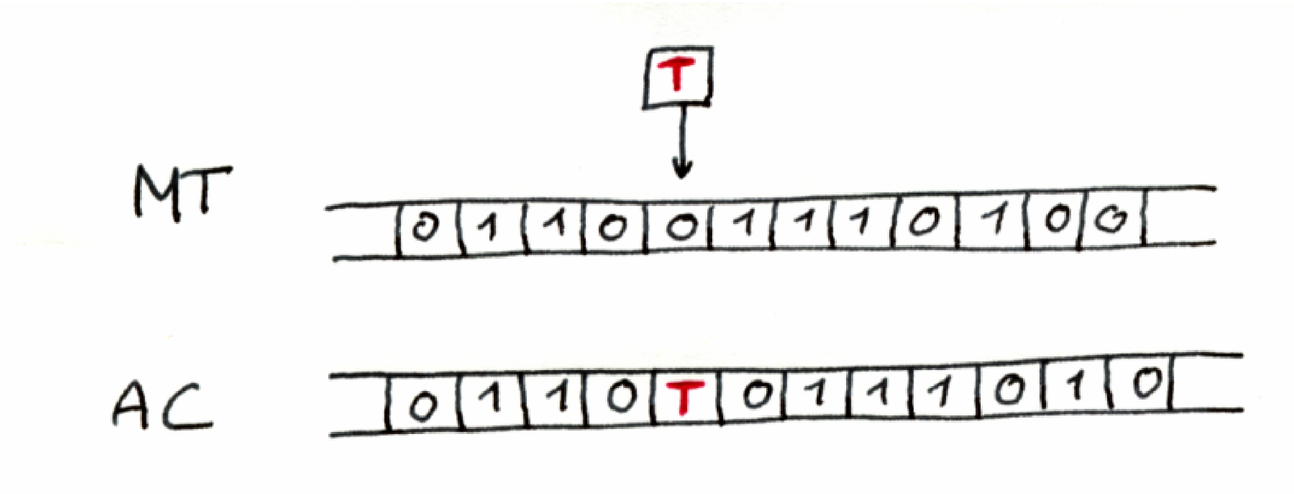
Universalité(s)

Une machine de Turing est un automate cellulaire particulier étudié sur des configurations particulières.

Une machine de Turing est un automate cellulaire particulier étudié sur des configurations particulières.



Une machine de Turing est un automate cellulaire particulier étudié sur des configurations particulières.



$\rightsquigarrow$ universalité Turing dans les AC

Universalité intrinsèque $=$

Universalité intrinsèque =

$\rightsquigarrow$ capacité à simuler de manière synchrone et uniforme tout AC.

Universalité intrinsèque =

$\rightsquigarrow$ capacité à simuler de manière synchrone et uniforme tout AC.

$\rightsquigarrow$ idée ancienne formalisée progressivement :
Banks 70, Albert & Čulik 87, Martin 94, Durand & Róka 96

Universalité intrinsèque =

$\rightsquigarrow$ capacité à simuler de manière synchrone et uniforme tout AC.

$\rightsquigarrow$ idée ancienne formalisée progressivement :
Banks 70, Albert & Čulik 87, Martin 94, Durand & Róka 96

$\mathcal{B}$ simule $\mathcal{A}$ =
– $\mathcal{B}$ “contient” toute la dynamique de $\mathcal{A}$

Universalité intrinsèque =

$\rightsquigarrow$ capacité à simuler de manière synchrone et uniforme tout AC.

$\rightsquigarrow$ idée ancienne formalisée progressivement :
Banks 70, Albert & Čulik 87, Martin 94, Durand & Róka 96

$\mathcal{B}$ simule $\mathcal{A}$ =
- $\mathcal{B}$ "contient" toute la dynamique de $\mathcal{A}$
- tous les diagrammes espace-temps de $\mathcal{A}$ "sont" des diagrammes espace-temps de $\mathcal{B}$

Universalité intrinsèque =

$\rightsquigarrow$ capacité à simuler de manière synchrone et uniforme tout AC.

$\rightsquigarrow$ idée ancienne formalisée progressivement :
Banks 70, Albert & Čulik 87, Martin 94, Durand & Róka 96

$\mathcal{B}$ simule $\mathcal{A}$ =

– $\mathcal{B}$ "contient" toute la dynamique de $\mathcal{A}$
– tous les diagrammes espace-temps de $\mathcal{A}$ "sont" des diagrammes espace-temps de $\mathcal{B}$

simulation =

changement d'échelle + relation de sous-système

(Mazoyer & Rapaport 98, Ollinger 02)

Notion de sous-système stable :

$\mathcal{B}$ est un sous-automate de $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$) si

Notion de sous-système stable :

$\mathcal{B}$ est un sous-automate de $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$) si

$$\begin{array}{ccc} B^{\mathbb{Z}^d} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & A^{\mathbb{Z}^d} \\ \downarrow \mathcal{B} & & \downarrow \mathcal{A} \\ B^{\mathbb{Z}^d} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & A^{\mathbb{Z}^d} \end{array}$$

où $\iota : B \to A$ est injective

Notion de sous-système stable :

$\mathcal{B}$ est un sous-automate de $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$) si

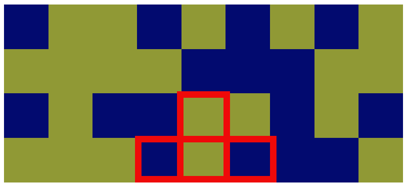
$$\begin{array}{ccc} B^{\mathbb{Z}^d} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & A^{\mathbb{Z}^d} \\ \downarrow \mathcal{B} & & \downarrow \mathcal{A} \\ B^{\mathbb{Z}^d} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & A^{\mathbb{Z}^d} \end{array}$$

où $\iota : B \to A$ est injective

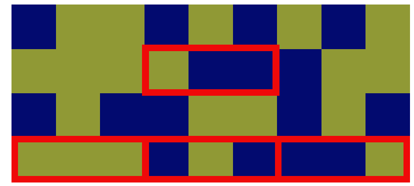
À renommage près, $\mathcal{B}$ est $\mathcal{A}$ restreint à un sous-alphabet

Transformations spatio-temporelles ($\mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\overrightarrow{T}}$) :

états : A



états : A^m

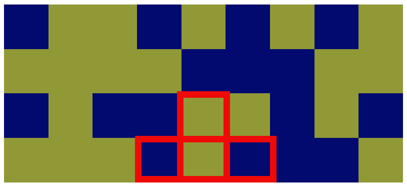


$$\mathcal{A} \xrightarrow{\overrightarrow{T}=<m,n>} \mathcal{A}^{\overrightarrow{T}}$$

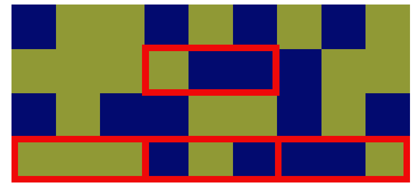
$$\mathcal{A}^{<m,n>} = o^m \circ \mathcal{A}^n \circ o^{-m}$$

Transformations spatio-temporelles ($\mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\overrightarrow{T}}$) :

états : A



états : A^m



$$\mathcal{A} \xrightarrow{\overrightarrow{T}=<m,n>} \mathcal{A}^{\overrightarrow{T}}$$

$$\mathcal{A}^{<m,n>} = o^m \circ \mathcal{A}^n \circ o^{-m}$$

Formellement, la simulation ($\preceq$) se définit par :

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists \overrightarrow{T}, \overrightarrow{T'} : \mathcal{A}^{\overrightarrow{T}} \sqsubseteq \mathcal{B}^{\overrightarrow{T'}}$$

Prorpiétés de $\preceq$

Prorpiétés de $\preceq$

– $\preceq$ est un pré-ordre ($\rightsquigarrow$ relation d'équivalence $\sim$)

Prorpiétés de $\preceq$

- $\preceq$ est un pré-ordre ($\rightsquigarrow$ relation d'équivalence $\sim$)
- $\{(\mathcal{A},\mathcal{B}) : \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}\}$ est récursivement énumérable (mais non récursif)

Prorpiétés de $\preceq$

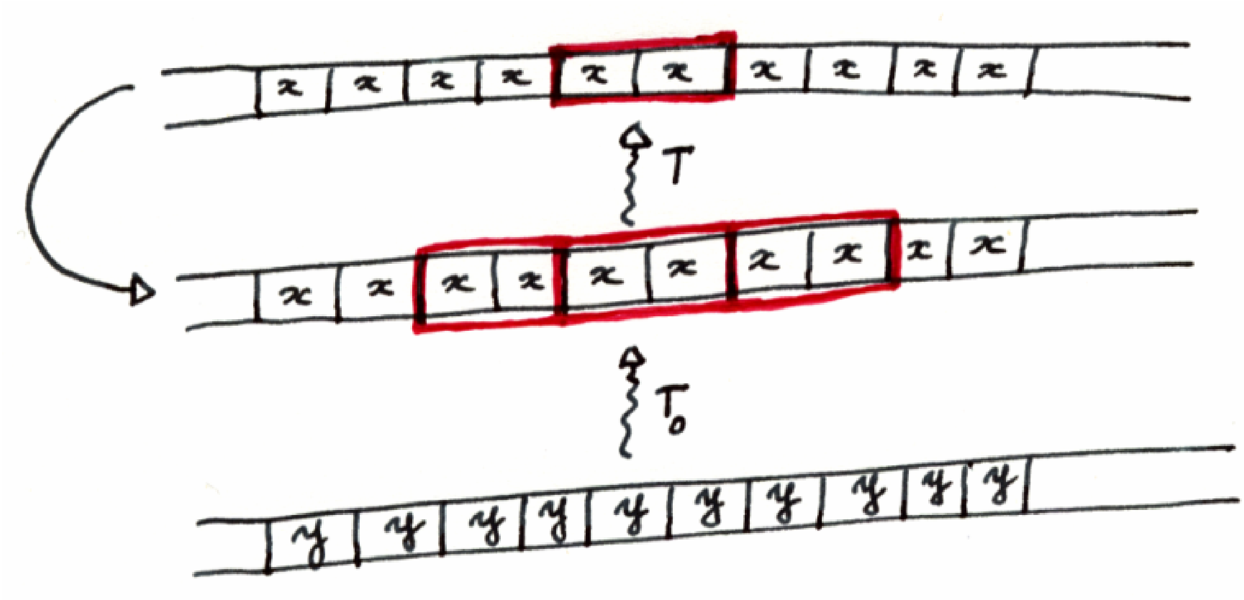
- $\preceq$ est un pré-ordre ($\rightsquigarrow$ relation d'équivalence $\sim$)
- $\{(\mathcal{A},\mathcal{B}) : \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}\}$ est récursivement énumérable (mais non récursif)
- $\preceq$ admet un minimum global : les AC à 1 état

Prorpiétés de $\preceq$

– $\preceq$ est un pré-ordre ($\rightsquigarrow$ relation d'équivalence $\sim$)

– $\{(\mathcal{A},\mathcal{B}) : \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}\}$ est récursivement énumérable (mais non récursif)

– $\preceq$ admet un minimum global : les AC à 1 état



Maximum global pour $\preceq$: la classe U des AC intrinsèquement universels

Maximum global pour $\preceq$: la classe U des AC intrinsèquement universels

Propriété. $\forall \mathcal{A} \in U, \forall \mathcal{B}, \exists m, n : \mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}^{<m,n>}$

Maximum global pour $\preceq$: la classe U des AC intrinsèquement universels

Propriété. $\forall \mathcal{A} \in U, \forall \mathcal{B}, \exists m, n : \mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}^{<m,n>}$

$\rightsquigarrow$ un AC intrinsèquement universel peut simuler directement tout AC

Maximum global pour $\preceq$: la classe U des AC intrinsèquement universels

Propriété. $\forall \mathcal{A} \in U, \forall \mathcal{B}, \exists m, n : \mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}^{<m,n>}$

$\rightsquigarrow$ un AC intrinsèquement universel peut simuler directement tout AC

Petits exemples.

- réseau $\mathbb{Z}$:
  - Banks 70 (2 états, 5 voisins)
  - Ollinger 03 (6 états, 3 voisins)
- réseau $\mathbb{Z}^2$:
  - Banks 70 (2 états, 5 voisins)
  - Conway 70 “Game of Life” (2 états, 9 voisins)

Propriétés & probabilités asymptotiques

– un rayon r est fixé

- un rayon r est fixé
- AC$_n$ $=$ AC de rayon r et d'alphabet $\{1, \ldots, n\}$

- un rayon r est fixé
- AC_n = AC de rayon r et d'alphabet $\{1, \ldots, n\}$
- $\mathsf{AC} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} AC_n$

- un rayon r est fixé
- AC$_n$ = AC de rayon r et d'alphabet $\{1, \ldots, n\}$
- AC $= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} AC_n$
- propriété $= \mathcal{P} \subseteq$ AC

- un rayon r est fixé
- AC$_n$ = AC de rayon r et d'alphabet $\{1, \ldots, n\}$
- AC $= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} AC_n$
- propriété = $\mathcal{P} \subseteq$ AC
- la probabilité de $\mathcal{P}$:

$$\mu(\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{P} \cap \mathrm{AC}_n|}{|\mathrm{AC}_n|}$$

- un rayon r est fixé
- AC$_n$ = AC de rayon r et d'alphabet $\{1, \ldots, n\}$
- AC $= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} AC_n$
- propriété = $\mathcal{P} \subseteq$ AC
- la probabilité de $\mathcal{P}$:

$$\mu(\mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} \frac{|\mathcal{P} \cap \mathrm{AC}_n|}{|\mathrm{AC}_n|}$$

Définition. $\mathcal{P}$ croissante si

$$\forall \mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B} : \mathcal{A} \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{P}$$

$\mathcal{P}$ est alors compatible avec le renommage

Un exemple :

Un exemple :

e est un état quiescent si $\mathcal{A}(e, \ldots, e) = e$

$\mathcal{P}$ = avoir un état quiescent

$\Rightarrow \frac{|\mathcal{P} \cap \mathrm{AC}_n|}{\mathrm{AC}_n} = 1 - (1 - \frac{1}{n})^n \Rightarrow \mu(\mathcal{P}) = 1 - \frac{1}{e}$

Un exemple :

e est un état quiescent si $\mathcal{A}(e, \ldots, e) = e$

$\mathcal{P}$ = avoir un état quiescent

$\Rightarrow \frac{|\mathcal{P} \cap \mathsf{AC}_n|}{\mathsf{AC}_n} = 1 - (1 - \frac{1}{n})^n \Rightarrow \mu(\mathcal{P}) = 1 - \frac{1}{e}$

Propriétés classiques décroissantes :

réversibilité, surjectivité, expansivité

Un exemple :

e est un état quiescent si $\mathcal{A}(e,\ldots,e) = e$

$\mathcal{P}$ = avoir un état quiescent

$\Rightarrow \frac{|\mathcal{P} \cap \mathrm{AC}_n|}{\mathrm{AC}_n} = 1 - (1 - \frac{1}{n})^n \Rightarrow \mu(\mathcal{P}) = 1 - \frac{1}{e}$

Propriétés classiques décroissantes :

réversibilité, surjectivité, expansivité

Une propriété croissante : l'universalité intrinsèque

$\rightsquigarrow \mu(U)$?

Automates cellulaires captifs

Une classe définie à partir d'un paradigme de localité renforcé

Une classe définie à partir d'un paradigme de localité renforcé

Definition. $\mathcal{A}$ est un AC captif (ACC) si

$$\forall a_1, \ldots, a_k : \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_k) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$$

Une classe définie à partir d'un paradigme de localité renforcé

Definition. $\mathcal{A}$ est un AC captif (ACC) si

$$\forall a_1, \ldots, a_k : \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_k) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$$

– un AC à 2 états est captif $\Leftrightarrow$ les 2 états sont quiescents

Une classe définie à partir d'un paradigme de localité renforcé

Definition. $\mathcal{A}$ est un AC captif (ACC) si

$$\forall a_1, \ldots, a_k : \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_k) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$$

- un AC à 2 états est captif $\Leftrightarrow$ les 2 états sont quiescents
- $\mathcal{A}$ réversible et captif $\Rightarrow$ $\mathcal{A}^{-1}$ captif

Une classe définie à partir d'un paradigme de localité renforcé

Definition. $\mathcal{A}$ est un AC captif (ACC) si

$$\forall a_1, \ldots, a_k : \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_k) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$$

– un AC à 2 états est captif $\Leftrightarrow$ les 2 états sont quiescents
– $\mathcal{A}$ réversible et captif $\Rightarrow$ $\mathcal{A}^{-1}$ captif
– pas de captif nilpotent ($\rightsquigarrow$ questions de décidabilité)

Une classe définie à partir d'un paradigme de localité renforcé

Definition. $\mathcal{A}$ est un AC captif (ACC) si

$$\forall a_1, \ldots, a_k : \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_k) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$$

- un AC à 2 états est captif $\Leftrightarrow$ les 2 états sont quiescents
- $\mathcal{A}$ réversible et captif $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ captif
- pas de captif nilpotent ($\rightsquigarrow$ questions de décidabilité)
- $\exists$ transformation uniforme des AC en captifs

Une classe définie à partir d'un paradigme de localité renforcé

Definition. $\mathcal{A}$ est un AC captif (ACC) si

$$\forall a_1, \ldots, a_k : \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_k) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$$

- un AC à 2 états est captif $\Leftrightarrow$ les 2 états sont quiescents
- $\mathcal{A}$ réversible et captif $\Rightarrow$ $\mathcal{A}^{-1}$ captif
- pas de captif nilpotent ($\rightsquigarrow$ questions de décidabilité)
- $\exists$ transformation uniforme des AC en captifs
- $\exists$ captifs intrinsèquement universels

Une classe définie à partir d'un paradigme de localité renforcé

Definition. $\mathcal{A}$ est un AC captif (ACC) si

$$\forall a_1, \ldots, a_k : \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_k) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$$

- un AC à 2 états est captif $\Leftrightarrow$ les 2 états sont quiescents
- $\mathcal{A}$ réversible et captif $\Rightarrow$ $\mathcal{A}^{-1}$ captif
- pas de captif nilpotent ($\rightsquigarrow$ questions de décidabilité)
- $\exists$ transformation uniforme des AC en captifs
- $\exists$ captifs intrinsèquement universels

probabilité dans la classe ACC : $\mu'(\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{P}\cap \text{ACC}_n|}{|\text{ACC}_n|}$

Loi 0-1. Pour toute propriété $\mathcal{P}$ non triviale :

- $\mathcal{P}$ croissante $\Rightarrow \mu'(\mathcal{P}) = 1$
- $\mathcal{P}$ décroissante $\Rightarrow \mu'(\mathcal{P}) = 0$

Loi 0-1. Pour toute propriété $\mathcal{P}$ non triviale :

– $\mathcal{P}$ croissante $\Rightarrow \mu'(\mathcal{P}) = 1$

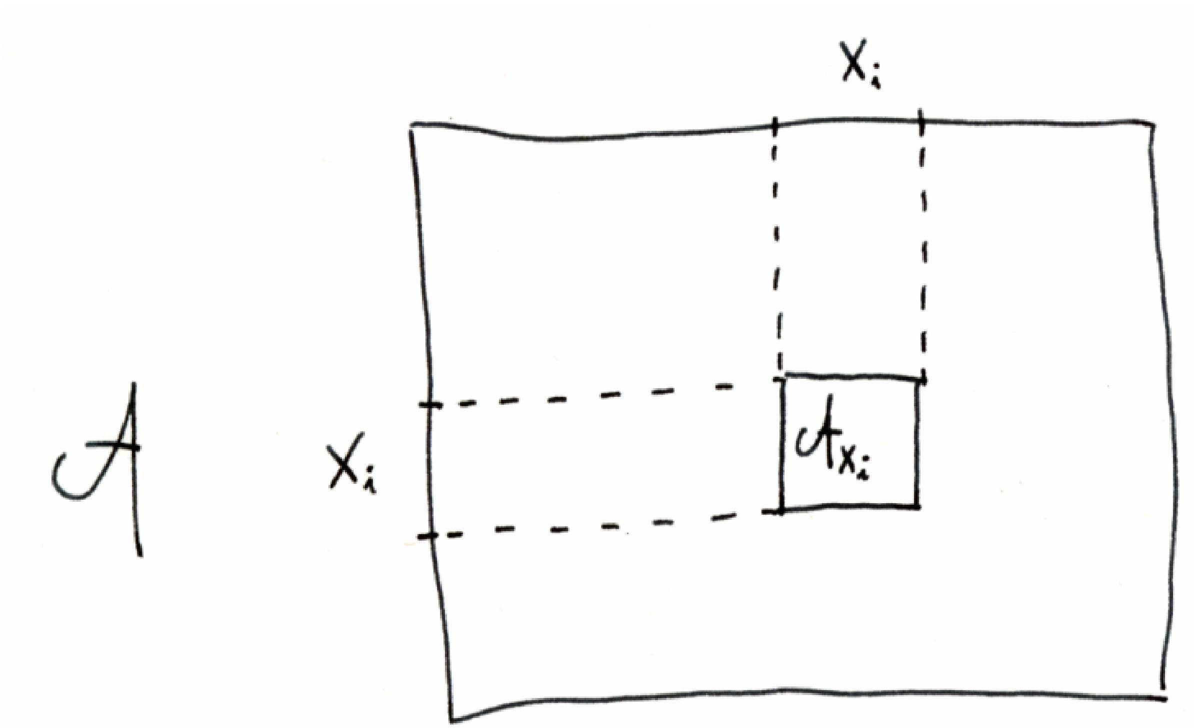
– $\mathcal{P}$ décroissante $\Rightarrow \mu'(\mathcal{P}) = 0$

Preuve.

Loi 0-1. Pour toute propriété $\mathcal{P}$ non triviale :

- $\mathcal{P}$ croissante $\Rightarrow \mu'(\mathcal{P}) = 1$
- $\mathcal{P}$ décroissante $\Rightarrow \mu'(\mathcal{P}) = 0$

Preuve.

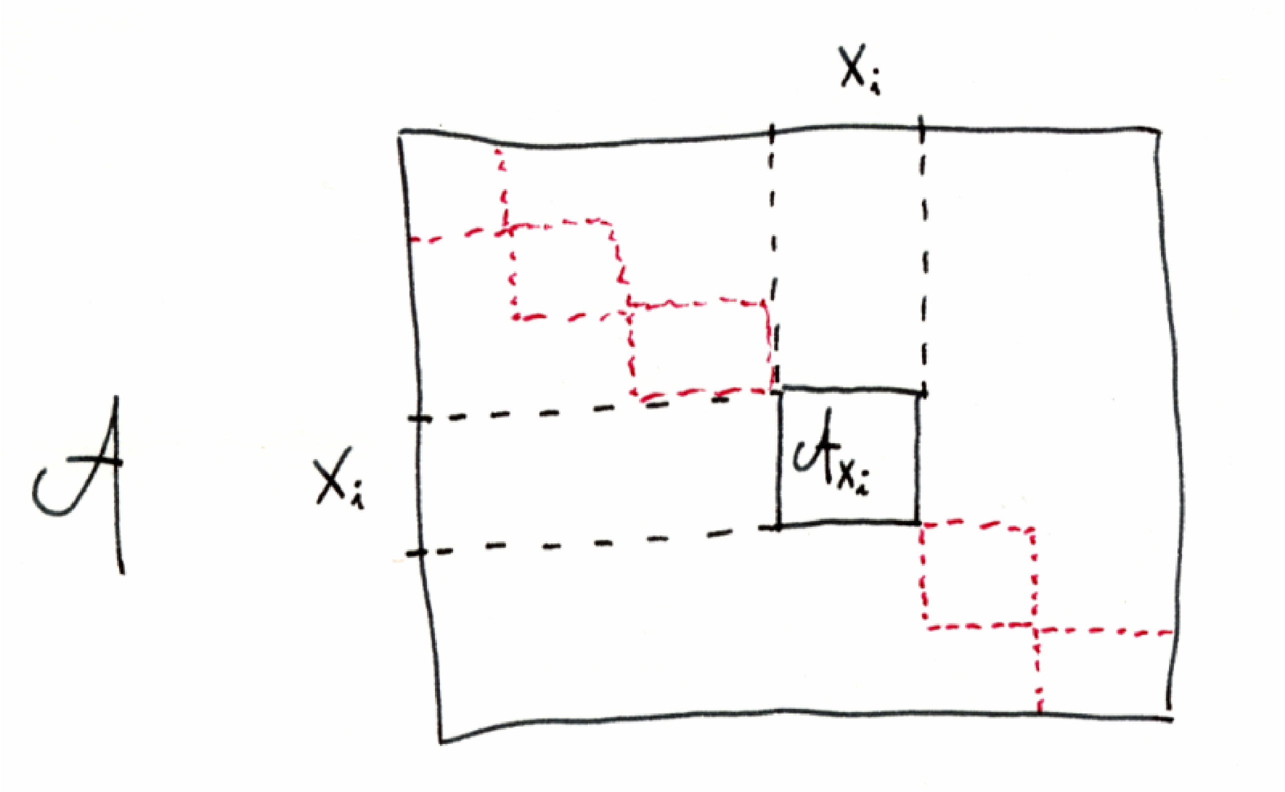


Loi 0-1. Pour toute propriété $\mathcal{P}$ non triviale :

– $\mathcal{P}$ croissante $\Rightarrow \mu'(\mathcal{P}) = 1$

– $\mathcal{P}$ décroissante $\Rightarrow \mu'(\mathcal{P}) = 0$

Preuve.



Par la loi 0-1, un ACC aléatoire est intrinsèquement universel, mais...

Par la loi 0-1, un ACC aléatoire est intrinsèquement universel, mais...

Théorème. $\exists r_0$ tel que, $\forall r \geq r_0$, l'appartenance à U pour un ACC est indécidable

Par la loi 0-1, un ACC aléatoire est intrinsèquement universel, mais...

Théorème. $\exists r_0$ tel que, $\forall r \geq r_0$, l'appartenance à U pour un ACC est indécidable

Coeur de la preuve :

un transformation τ : AC $\rightarrow$ ACC telle que

- τ est récursive
- $\forall \mathcal{A} \in$ AC, $\mathcal{A} \preceq \tau(\mathcal{A})$
- $\mathcal{A}$ et $\tau(\mathcal{A})$ simulent les mêmes AC surjectifs non triviaux

Il n'y a pas de limite à la complexité des ACC non intrinsèquement universels

Il n'y a pas de limite à la complexité des ACC non intrinsèquement universels

Théorème. $\forall \mathcal{A} \in \mathrm{ACC} \setminus U$, $\exists \mathcal{B} \in \mathrm{ACC} \setminus U$ tel que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \not\preceq \mathcal{A}$

Il n'y a pas de limite à la complexité des ACC non intrinsèquement universels

Théorème. $\forall \mathcal{A} \in \mathrm{ACC} \setminus U$, $\exists \mathcal{B} \in \mathrm{ACC} \setminus U$ tel que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \not\preceq \mathcal{A}$

Preuve :

– semi-decidabilité de $\preceq$ + indecidabilité de U $\Rightarrow$ pas de maximum global dans $\mathrm{ACC} \setminus U$

– $\forall\ \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{ACC} \setminus U$, $\exists \mathcal{C} \in \mathrm{ACC} \setminus U$ avec $\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$ et $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}$

Retour au cas général...

Retour au cas général...

pas de loi 0-1 (propriété état quiescent)

Retour au cas général...

pas de loi 0-1 (propriété état quiescent)

Définition. $\mathcal{P}_{\sqsubseteq} = \{\mathcal{A} : \exists \mathcal{B}, 1 < |\mathcal{B}| < |\mathcal{A}| \text{ et } \mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}\}$

Avoir un sous-automate non trivial

Retour au cas général...

pas de loi 0-1 (propriété état quiescent)

Définition. $\mathcal{P}_{\sqsubseteq} = \{\mathcal{A} : \exists \mathcal{B}, 1 < |\mathcal{B}| < |\mathcal{A}| \text{ et } \mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}\}$

Avoir un sous-automate non trivial

Propriété. $\mu(\mathcal{P}_{\sqsubseteq}) = 0$

Preuve combinatoire.

Retour au cas général...

pas de loi 0-1 (propriété état quiescent)

Définition. $\mathcal{P}_{\sqsubseteq} = \{\mathcal{A} : \exists \mathcal{B}, 1 < |\mathcal{B}| < |\mathcal{A}| \text{ et } \mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}\}$

Avoir un sous-automate non trivial

Propriété. $\mu(\mathcal{P}_{\sqsubseteq}) = 0$

Preuve combinatoire.

– un AC aléatoire n'a pas de structure locale
– les arguments pour la classe ACC ne s'appliquent pas

Questions ouvertes

(i). existe-t-il $\mathcal{A}$ tel que $\forall m, n$, $\mathcal{A}^{<m,n>} \notin \mathcal{P}_{\sqsubseteq}$?

(ii). $\mu(\mathcal{P}_U)$?

– $\mu(\mathcal{P}_U) = c > 0$

– non défini

– $\mu(\mathcal{P}_U) = 0$

(iii). à quelle “hauteur” dans $\preceq$ se trouve un AC aléatoire ?

(iv). Quelles $\sim$-classes contiennent un ACC ?