Deux facettes des automates cellulaires

Journée de rentrée I2M

G. Theyssier

Octobre 2015

Espaces symboliques

- **Alphabet** (ensemble fini)

$$A^G$$

- **Réseau**
  - groupe finiment engendré
  - voire monoïde, graphe...
  - *typiquement :* $\mathbb{Z}^d$

Topologie pro-discrète

- configuration

$$c : G \to A$$

- motif fini

$$\rho : D \subseteq G \to A$$

- cylindre (base topologique)

$$C_\rho = \{c : \forall z \in D, c(z) = \rho(z)\}$$

- distance

$$d(c, c') = 2^{-\min\{|z| : c(z) \neq c'(z)\}}$$

A^G est compact

Automates cellulaires

- **Définition 1 :**
  - F continue sur A^G qui commute avec les translations

Automates cellulaires

- **Définition 1 :**
  - F continue sur A^G qui commute avec les translations

- **Définition 2 :**
  - **voisinage** : $D \subseteq G$ fini
  - **règle locale** : $f : A^D \to A$
  - **fonction globale** : $F : A^G \to A^G$ t.q.

$$F(c)_z = f(c_{D,z})$$

où $c_{D,z} = z' \in D \mapsto c(z + z')$

Automates cellulaires

- **Définition 1 :**
  - F continue sur A^G qui commute avec les translations

- **Définition 2 :**
  - **voisinage** : $D \subseteq G$ fini
  - **règle locale** : $f : A^D \to A$
  - **fonction globale** : $F : A^G \to A^G$ t.q.

$$F(c)_z = f(c_{D,z})$$

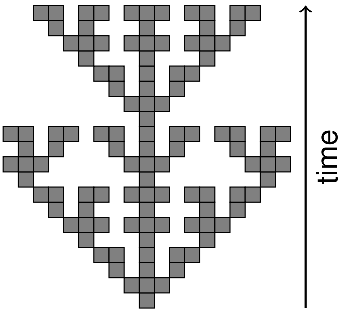
  où $c_{D,z} = z' \in D \mapsto c(z + z')$

Curtis-Hedlund-Lyndon

Les deux définitions sont équivalentes

Exemple

- $G = \mathbb{Z}$
- $A = \{0, 1\}$
- $D = \{-1, 0, 1\}$
- $f(x, y, z) = x + y + z \bmod 2$



Surjonctivité et jardin d'Éden

Surjonctivité et jardin d'Éden

Surjonctivité

F injectif $\Rightarrow$ F surjectif

Surjonctivité et jardin d'Éden

Surjonctivité

F injectif $\Rightarrow$ F surjectif

- $c \overset{\infty}{=} d$ si $\{z : c(z) \neq d(z)\}$ est fini

Surjonctivité et jardin d'Éden

Surjonctivité

F injectif $\Rightarrow$ F surjectif

- $c \overset{\infty}{=} d$ si $\{z : c(z) \neq d(z)\}$ est fini
- **pré-injectivité** : $\left(F(c) = F(d) \text{ et } c \overset{\infty}{=} d\right) \Rightarrow c = d$
- Équivalence de Moore-Myhill :

surjectivité $\Leftrightarrow$ **pre-injectivité**

Surjonctivité et jardin d'Éden

Surjonctivité

F injectif $\Rightarrow$ F surjectif

- $c \overset{\infty}{=} d$ si $\{z : c(z) \neq d(z)\}$ est fini
- **pré-injectivité** : $\big(F(c) = F(d)$ et $c \overset{\infty}{=} d\big) \Rightarrow c = d$
- Équivalence de Moore-Myhill :

surjectivité $\Leftrightarrow$ pre-injectivité

Théorème (dernière partie en 2010)

L'équivalence de Moore-Myhill est vraie sur le groupe G **si et seulement si** G est moyennable.

Surjonctivité et jardin d'Éden

Surjonctivité

F injectif $\Rightarrow$ F surjectif

- $c \overset{\infty}{=} d$ si $\{z : c(z) \neq d(z)\}$ est fini
- **pré-injectivité** : $\big(F(c) = F(d) \text{ et } c \overset{\infty}{=} d\big) \Rightarrow c = d$
- Équivalence de Moore-Myhill :

surjectivité $\Leftrightarrow$ **pre-injectivité**

Théorème (dernière partie en 2010)

L'équivalence de Moore-Myhill est vraie sur le groupe G **si et seulement si** G est moyennable.

Ouvert (Gottschalk, 1973)

Y a-t-il un groupe avec un AC injectif qui ne soit pas surjectif ?

Dynamique topologique

- **Eq** $\equiv$ **avoir un point d'équicontinuité**

$$\exists \mathbf{x}, \forall \epsilon, \exists \delta, \forall \mathbf{y}, \forall t,\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \delta \Rightarrow d\big(F^t(\mathbf{x}), F^t(\mathbf{y})\big) \leq \epsilon$$

- **S** $\equiv$ **sensibilité aux conditions initiales**

$$\exists \epsilon, \forall \mathbf{x}, \forall \delta, \exists \mathbf{y}, \exists t,\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \delta \text{ and } d\big(F^t(\mathbf{x}), F^t(\mathbf{y})\big) > \epsilon$$

Dynamique topologique

- **Eq** $\equiv$ **avoir un point d'équicontinuité**

$$\exists \mathbf{x}, \forall \epsilon, \exists \delta, \forall \mathbf{y}, \forall t,\ d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \delta \Rightarrow d\big(F^t(\mathbf{x}), F^t(\mathbf{y})\big) \leq \epsilon$$

- **S** $\equiv$ **sensibilité aux conditions initiales**

$$\exists \epsilon, \forall \mathbf{x}, \forall \delta, \exists \mathbf{y}, \exists t,\ d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \delta \text{ and } d\big(F^t(\mathbf{x}), F^t(\mathbf{y})\big) > \epsilon$$

Kůrka, 1997

Pour $G = \mathbb{Z}$:

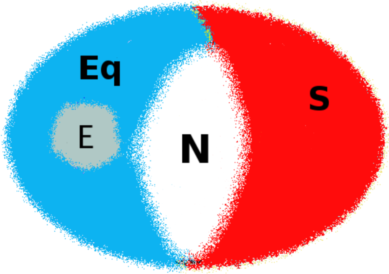
1. tout AC est soit **S**, soit **Eq**
2. si $F \in$ **Eq** alors il a des points d'équicontinuité périodiques

Dynamique topologique

$G = \mathbb{Z}^d$ **avec** $d \geq 2$

Sablik-Theyssier, 2008

1. il existe des AC en dehors de $\mathbf{S} \cup \mathbf{Eq}$
2. $\exists F \in \mathbf{Eq}$ dont tous les points d'équicontinuité sont apériodiques



Dynamique topologique

Expansivité

Il existe $D \subseteq G$ fini tel que

$$\forall c \neq d, \exists t : F^t(c)_{|D} \neq F^t(d)_{|D}$$

- un AC réversible ne peut pas être expansif
- pas d'expansif si G a une croissance superlinéaire (ex : $\mathbb{Z}^2$)

Dynamique topologique

Expansivité

Il existe $D \subseteq G$ fini tel que

$$\forall c \neq d, \exists t : F^t(c)_{|D} \neq F^t(d)_{|D}$$

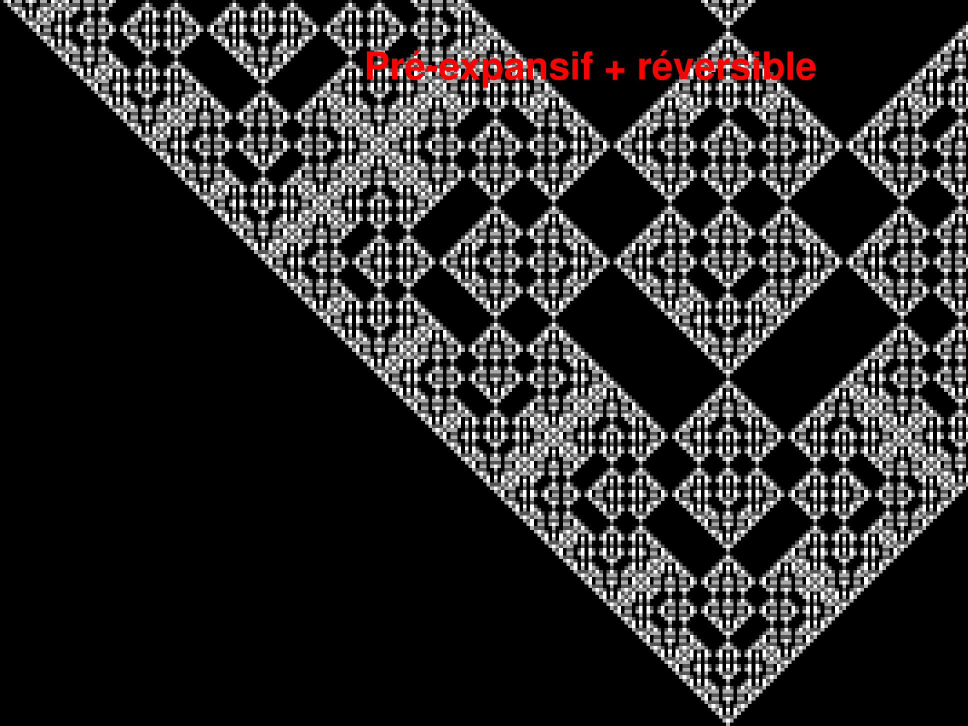
- un AC réversible ne peut pas être expansif
- pas d'expansif si G a une croissance superlinéaire (ex : $\mathbb{Z}^2$)

Pré-expansivité (travail en cours, A. Gajardo, V. Nesme)

Il existe $D \subseteq G$ fini tel que

$$\forall c \neq d,\ \text{si } c \overset{\infty}{=} d \text{ alors } \exists t : F^t(c)_{|D} \neq F^t(d)_{|D}$$

- $G = \mathbb{Z}$: il existe des pré-expansifs réversibles
- $G = \mathbb{Z}^2$, groupe libre : résultats négatifs + k-expansivité


Pré-expansif + réversible

Complexité algorithmique

Complexité algorithmique

$\bigcup_n \Sigma_n^0$	*arithmétique*
Σ_n^0, Π_n^0	*formule arithmétique, n quantificateurs*
Δ_1^0	*récursif, Turing-calculable, décidable, etc*
PSPACE	*espace polynomial*
NP	*temps non-déterministe polynomial*
P	*temps polynômial*
NC	*temps parallèle polylogarithmique*

Dynamique ergodique

$G = \mathbb{Z}$

- μ une mesure de probabilité sur A^G
- $F^t(\mu) = E \mapsto \mu(F^{-t}(E))$
- suite μ, $F(\mu)$, $F^2(\mu)$, ...

Dynamique ergodique

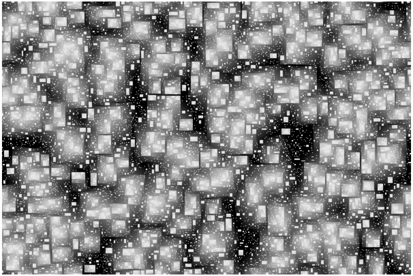
$G = \mathbb{Z}$

- μ une mesure de probabilité sur A^G
- $F^t(\mu) = E \mapsto \mu(F^{-t}(E))$
- suite μ, $F(\mu)$, $F^2(\mu)$, ...
- Ω_μ : support des mesures limites
- μ-nilpotence $\Leftrightarrow$ Ω_μ est un singleton

Dynamique ergodique

$G = \mathbb{Z}$

- μ une mesure de probabilité sur A^G
- $F^t(\mu) = E \mapsto \mu(F^{-t}(E))$
- suite μ, $F(\mu)$, $F^2(\mu)$, ...
- Ω_μ : support des mesures limites
- μ-nilpotence $\Leftrightarrow$ Ω_μ est un singleton



Dynamique ergodique

$G = \mathbb{Z}$

- μ une mesure de probabilité sur A^G
- $F^t(\mu) = E \mapsto \mu(F^{-t}(E))$
- suite μ, $F(\mu)$, $F^2(\mu)$, ...
- Ω_μ : support des mesures limites
- μ-nilpotence $\Leftrightarrow$ Ω_μ est un singleton

Boyer-Delacourt-Poupet-Sablik-Theyssier, 2014

- toute propriété non-triviale de Ω_μ est Π^0_3-difficile
- si la convergence est simple, la μ-nilpotence est au plus Π^0_2
- **corollaire :** il y a des Ω_μ non atteignables en limite simple

Automates cellulaires “freezing”

Travaux en cours avec Ollinger, Goles, Salo, Törmä

Automates cellulaires “freezing”

Travaux en cours avec Ollinger, Goles, Salo, Törmä

Definition

- A muni d'un ordre $\leq$
- $\forall c, \forall z : F(c)_z \leq c_z$

Automates cellulaires “freezing”

Travaux en cours avec Ollinger, Goles, Salo, Törmä

Definition

- A muni d’un ordre $\leq$
- $\forall c, \forall z : F(c)_z \leq c_z$

- pour $G = \mathbb{Z}$, le problème de prédiction est **NC**
- l’atteignabilité (ouvert $\rightarrow$ ouvert) est **indécidable**

Automates cellulaires “freezing”

Travaux en cours avec Ollinger, Goles, Salo, Törmä

Definition

- A muni d'un ordre $\leq$
- $\forall c, \forall z : F(c)_z \leq c_z$

- pour $G = \mathbb{Z}$, le problème de prédiction est **NC**
- l'atteignabilité (ouvert $\rightarrow$ ouvert) est **indécidable**

- $\left(F^t(\mu)\right)_t$ converge simplement
- pour $G = \mathbb{Z}^2$, le problème de la μ-nilpotence reste **indécidable**
- un exemple avec $A = \{0, 1\}$ et deux seuils critiques